

ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE • BAND 41 • HEFT 5 • 1942

Versuch über die elektrostatische Abstoßung paralleler Elektronenstrahlen

Von K. H. Stehberger

(Mit 4 Abbildungen)

1. Einleitung

Die Elektronen eines Kathodenstrahls unterliegen infolge ihrer Ladung einer gegenseitigen elektrostatischen Abstoßung, die sich um so mehr bemerkbar macht, je größer die Ladungsdichte innerhalb des Strahls, und je geringer die Geschwindigkeit der Strahlelektronen ist. Während sich im Inneren eines ausgedehnten Strahlvolumens diese Kräfte praktisch aufheben, können sie in den Randbezirken merklichen Einfluß gewinnen. Und zwar kann die gegenseitige Abstoßung der Elektronen sowohl in der Richtung des Strahls als auch quer dazu wirksam werden. Der erstere Fall tritt beispielsweise besonders deutlich in den bekannten Kennlinien der funkttechnischen Elektronenröhren in Erscheinung („Raumladungswirkung“¹⁾). Die dort benutzten Elektronenstrahlen zeichnen sich durch eine im Vergleich zu ihrem Querschnitt sehr geringe Länge aus. Der zweite Fall einer *transversalen* Beeinflussung der Strahlelektronen wird dagegen vorwiegend bei solchen Strahlen eintreten, deren Länge groß ist gegenüber dem Querschnitt. Diese Voraussetzung wird insbesondere bei Strahlen, wie sie in elektronenoptischen Anordnungen vorkommen, zutreffen.

Während über die longitudinale Abstoßung der Strahlelektronen eine große Zahl experimenteller und theoretischer Untersuchungen vorliegt, ist von quantitativ auswertbaren Versuchen über die *transversale* Abstoßung der Elektronen, die zur Verbreiterung eines zunächst parallel verlaufenden Strahls führen muß, bisher wohl noch nichts bekannt geworden, was sich aus den großen experimentellen Schwierigkeiten dieser Aufgabe erklärt¹⁾. Daß diese Abstoßungskraft bei langsamen Strahlen eine bemerkenswerte Größe erreichen kann, mag ein Zahlenbeispiel nachweisen:

1) Der älteste Versuch in dieser Richtung findet sich bei W. Crookes, Phil. Trans. 1879 II. S. 652. Seine Nachprüfung durch E. Wiedemann u. H. Ebert, Wied. Ann. 46. S. 158. 1892, erwies ihn als auf Irrtum beruhend.

V
4
1

1
9
4
2

XUM

Denkt man sich einen langen Elektronenstrahl von gleichbleibendem Querschnitt und mit der kleinen Geschwindigkeit $v = 10^8$ cm/sec und der Stromstärke $J = 10^{-8}$ Amp., so enthält jede Längeneinheit des Strahls die Ladungsmenge J/v . Für das radial gerichtete elektrische Feld in der Umgebung ergibt sich

$$(1) \quad E = \frac{2J}{v r} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ stat. E.} = 0,36 \text{ Volt/cm,}$$

wobei der Abstand r des Aufpunktes von der Strahlachse mit 0,5 cm eingesetzt wurde. Ein Elektron, das sich mit gleicher Geschwindigkeit im Abstand r parallel zum Strahl bewegt, wird unter der Einwirkung dieser Feldstärke bereits nach Durchlaufen einer Flugstrecke von 1 cm eine Ablenkung von 0,32 mm aus seiner anfänglichen Bahnrichtung erfahren.

Um diesen Vorgang experimentell so zu verwirklichen, daß eine quantitative Beobachtung möglich wird, muß eine Versuchsanordnung gewählt werden, die folgenden Anforderungen genügt:

1. Es muß ein langer Elektronenstrahl von gleichbleibendem Querschnitt und verhältnismäßig hoher Stromstärke bei möglichst kleiner Geschwindigkeit hergestellt werden.

2. Ein zweiter Strahl von sehr kleinem und ebenfalls gleichbleibendem Querschnitt muß dem ersten zunächst genau parallel geführt werden.

3. Der geringe Abstand beider Strahlen muß über die ganze Strahlänge hin genügend genau bekannt sein.

4. Zwischen den Elektroden der Versuchsröhre dürfen keine Spannungen bestehen, die 10 Volt übersteigen, da sonst das Auftreten von Trägern die geringen zu messenden Feldstärken wesentlich verändern kann.

5. Verschiebungen des Strahlendes des feinen Strahles um Beträge unter 1 mm müssen noch genügend sicher gemessen werden können.

Alle diese Voraussetzungen erscheinen am besten durch die Anwendung der Methode der „Wendelstrahlen“ erfüllbar, die vom Verf. bereits bei einer früheren Gelegenheit mit Vorteil benutzt wurde¹⁾.

Ein Elektronenstrahl, der im homogenen Magnetfeld einer langen Zylinderspule in Richtung der Feldstärke verläuft, und

1) K. H. Stehberger, Ann. d. Phys. [5] 30. S. 621. 1937. Dort findet sich auch eine ausführlichere Erläuterung des Grundsätzlichen. Inzwischen fand das Wendelstrahlprinzip eine technische Anwendung auf dem Gebiet des Fernsehens durch A. Rose u. H. Iams, Proc. Inst. Radio Eng. 27. 1939; ferner Electronics, Juli 1939.

dessen Querschnitt zu Beginn durch eine Lochblende festgelegt ist, behält diesen Querschnitt und ebenso dessen Lage innerhalb des Spulenquerschnitts über die ganze Strahlänge bei, wenn nur das Magnetfeld so stark ist, daß jede mögliche Geschwindigkeitskomponente der Elektronen senkrecht zur Feldachse eine Wendung ihrer Bahn von hinreichend kleinem Durchmesser verursacht. Unter dem Einfluß eines senkrecht zum Magnetfeld H gerichteten elektrischen Feldes E erhalten die Elektronen des Wendelstrahls eine gleichförmige mittlere Geschwindigkeit von der Größe E/H in der senkrecht auf E und auf H stehenden Richtung¹⁾.

Wir wollen nun die Einwirkung eines Wendelstrahls auf einen zweiten in geringem Abstand parallel verlaufenden untersuchen. Der eine, Strahl I , soll bei einer Geschwindigkeit v_1 unter 10 Volt eine Stromstärke von mindestens 10^{-5} Amp. besitzen. Der feine Meßstrahl II im Abstand von etwa 5 mm von Strahl I würde ohne den Einfluß von dessen elektrischem Feld in seiner ganzen Länge geradlinig und parallel zu Strahl I verlaufen, da ja beide Strahlen den Kraftlinien des gleichen homogenen Magnetfeldes folgen. In dem radialen elektrischen Feld des intensiven Strahls I wird jedoch nach dem oben Gesagten der Meßstrahl II zu seiner Strahlgeschwindigkeit v_2 eine kleine Geschwindigkeit v_q erhalten, die senkrecht auf der magnetischen sowie der elektrischen Feldstärke steht. Das bedeutet: Der Strahl II wird, ohne seinen Abstand von Strahl I merklich zu ändern, auf einer Schraubenkurve verlaufen, deren Achse mit der Strahlachse I zusammenfällt. Wählt man die Verhältnisse so, daß die gesamte Strahlänge nur einen kleinen Bruchteil einer Schraubenwindung umfaßt, so kann die Ablenkung des Strahls II als linear und senkrecht zur Verbindungslinie zwischen den Strahlachsen am Anfangspunkt der gemeinsamen Strahlänge erfolgend betrachtet werden. Die Verschiebung des Strahlendes II unter dem Einfluß des elektrischen Feldes des Strahls I beträgt dann

$$(2) \quad d = v_q \cdot T = v_q \cdot \frac{l_1}{v_1} = \frac{2J_1 l_1}{r H v_1 v_2},$$

worin T die Laufzeit der Elektronen, l_1 die gemeinsame Strahlänge, r den Abstand der beiden Strahlachsen, v_1 und v_2 die Strahlgeschwindigkeiten beider Strahlen bedeuten. Bei der Aufstellung dieser Formel wurde von den Verhältnissen an den Strahlenden abgesehen, was unter der Voraussetzung eines genügend großen l_1/r und im Hinblick auf die Genauigkeitsgrenzen der ganzen Messung ohne weiteres zulässig erscheint.

1) a. a. O. S. 629.

2. Versuchsanordnung

Zur experimentellen Verwirklichung des oben erläuterten Vorgangs wurde eine Versuchsröhre verwendet, die in Abb. 1 in den Hauptteilen schematisch dargestellt ist. Um die beiden Strahlen unabhängig voneinander in Intensität und Geschwindigkeit verändern zu können, wurde für jeden Strahl eine besondere Glühkathode K_1 und K_2 eingebaut. K_2 besitzt ein Geschwindigkeitsfilter. Zwischen Glühdraht und Anodenblende B durchlaufen die Elektronen noch zwei weitere Blenden, von denen die erste sich auf Anodenpotential (Erde) befindet, während die zweite mit dem positiven

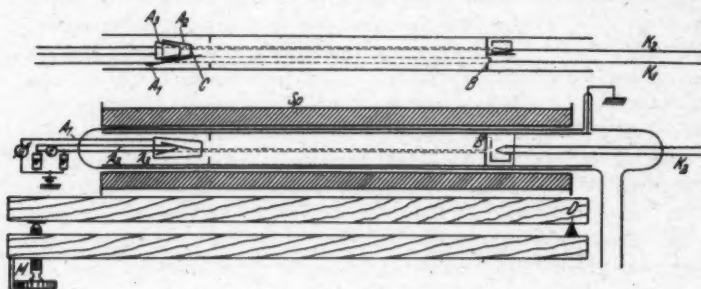


Abb. 1. Versuchsanordnung

Ende des Glühdrahts verbunden ist, so daß nur diejenigen Elektronen, die nahezu keine Querkomponente der Geschwindigkeit besitzen, in den Strahl II gelangen können. Die den Abstand sowie den Querschnitt der beiden Strahlen bestimmenden Blendenöffnungen befinden sich in einer gemeinsamen Anodenplatte B ; ihr Abstand r kann auf diese Weise genau gemessen werden. Eine dünne Zwischenwand, die zwischen den beiden Blendenöffnungen in den Kathodenraum hineinragt, sorgt dafür, daß von jeder Kathode Elektronen nur durch die zugehörige Anodenblende gelangen können. Nach Durchsetzung von B verlaufen beide Strahlen parallel durch einen 25 cm langen abgeschirmten und praktisch feldfreien Raum. Hier findet unter dem Einfluß des elektrostatischen Feldes des Strahls I die geringe Drehung des Strahls II um die Achse von I statt. Nach Durchlaufen dieser Strecke gelangen beide Strahlen auf die für sie bestimmten Auffangelektroden A_1 , A_2 und A_3 . A_1 hat die Aufgabe, den intensiven Strahl I möglichst vollständig aufzunehmen, unter weitgehendster Vermeidung von Reflexion. Deshalb ist diese Elektrode als berußte Fläche ausgeführt, die so gestellt

wird, daß der aufzufangende Strahl fast streifend auffällt¹⁾. Außerdem erhält sie noch eine kleine positive Vorspannung. Die beiden Auffänger A_2 und A_3 dienen der genauen Bestimmung der Lage des Strahlendes II . Ihre Schaltung ist der Abb. 1 zu entnehmen. Am Elektrometer E , einem Einfadeninstrument, dessen Schneiden einerseits mit A_2 und A_3 verbunden, andererseits über je einen Widerstand von 10^9 Ohm zur Erde abgeleitet sind, erhält man einen Ausschlag, dessen Vorzeichen von der Verteilung der Strahlintensität II auf A_2 und A_3 abhängt. Er verschwindet, wenn beide Auffänger gleiche Intensitäten aufnehmen, wenn also die Strahlachse gerade die Kante C der Elektrode A_1 schneidet. Diese Einrichtung gestattet somit eine äußerst genaue Kontrolle der Lage des Strahlendes II in der zu C senkrechten Richtung. Die Einstellung auf Verschwinden des Elektrometerrausschlags erfolgt durch eine geringe Drehung der Spulenachse gegen die Röhrenachse. Während die Röhre unbeweglich montiert ist, ruht die 40 cm lange Feldspule Sp auf einer auf drei Stellschrauben gelagerten Platte. Eine dieser Schrauben ist als Mikrometerschraube M ausgebildet. Durch ihre Betätigung wird die Spule um die horizontale Querachse gedreht. Das Ende eines Wendelstrahls von der Länge l_2 , der ja dieser Drehung folgt, verschiebt sich dann auf dem Auffänger um die Strecke $d = \frac{a l_2}{L}$, worin a die Hebung bzw. Senkung der Schraube M , L den Abstand zwischen M und der Drehachse D bedeuten.

3. Meßweise

Um nun die Ablenkung des Strahls II durch das elektrische Feld des Strahls I zu messen, wurde folgendermaßen verfahren:

Zunächst mußte die Feldspule in der Horizontalebene so zur Versuchsröhre orientiert werden, daß zwar Strahl II vollständig auf die Auffänger A_2 und A_3 gelangte, von Strahl I jedoch keine merkliche Intensität dort eintraf. Dies ließ sich durch abwechselndes Einschalten der Kathoden K_1 und K_2 am Elektrometer leicht beobachten. Unterschritt die magnetische Feldstärke in der Spule einen gewissen Wert, der natürlich von der Entfernung r der beiden Strahlachsen abhing, ließ sich eine hinreichende Trennung der Intensitäten nicht mehr erreichen. Daß es überhaupt möglich ist, die Intensitäten der beiden im Abstand von wenigen Millimetern parallel verlaufenden Strahlen auf den Auffängern so vollständig zu isolieren, daß die Messung des kleinen J_2 von dem 1000 mal

1) Einzelheiten vgl. a. a. O. S. 622.

größeren J_1 nicht merklich gestört wird, erweist die besondere Leistungsfähigkeit der Wendelstrahlmethode im Hinblick auf die hier gestellte Aufgabe.

Nachdem also festgestellt war, daß bei eingeschaltetem J_1 die Auffänger A_1 und A_2 stromlos blieben, während bei eingeschaltetem J_2 A_1 keine Aufladung erfuhr, wurde bei eingeschaltetem J_2 die Mikrometerschraube M so lange verstellt, bis der Elektrometerfaden sich in der Nullstellung befand. Wurde nun J_1 zusätzlich eingeschaltet, so zeigte das Elektrometer wieder einen Ausschlag, dessen Vorzeichen von der Stromrichtung in der Feldspule abhing, und dessen Größe J_1 proportional war. Eine unmittelbare Aufladung durch J_1 war durch die erwähnten Vorversuche ausgeschlossen worden. Die beobachtete Aufladung konnte also nur durch eine Verschiebung des Strahlendes II unter dem Einfluß des elektrischen Feldes des Strahls I verursacht sein. Die Größe dieser Verschiebung konnte aus dem Betrag der Drehung von M ermittelt werden, die nötig war, um den Ausschlag des Elektrometers wieder zum Verschwinden zu bringen. J_1 wurde mit Hilfe eines empfindlichen Drehspulzeigerinstruments G gemessen; es variierte zwischen 10^{-6} und 10^{-4} Amp. Ferner wurden die Beschleunigungsspannungen an K_1 und K_2 sowie die Stromstärke in der Feldspule gemessen.

4. Auswertung der Beobachtungen

Aus den unmittelbar abgelesenen Hebungen der Mikrometerschraube M ergibt sich nach der oben angegebenen Umrechnung sogleich die jeweilige Verschiebung des Strahlendes II . Diese betrug bei unseren Versuchen stets weniger als 1 mm. Variiert wurden die Stromstärke J_1 , die Stromstärke des Spulenstroms J_{sp} , sowie die Beschleunigungsspannungen V_1 und V_2 und endlich der Strahlabstand r . Die Beschleunigungsspannungen konnten allerdings nur innerhalb eines ziemlich engen Bereichs um 10 Volt herum verändert werden, da einerseits eine erhebliche Erniedrigung dieser Größe die Intensität unter die für die Messung notwendige Mindestgröße sinken ließ, während andererseits eine Erhöhung über die Trägerbildungs-spannung der Gasrestatome in der Röhre sofort mit einem den Versuch störenden Auftreten von Trägern im Strahlraum verbunden war. Hierzu ist zu bemerken, daß eine Trägerbildung, die so gering ist, daß ein Trägerstrom praktisch nicht mehr meßbar wäre, in einem elektrisch nahezu feldfreien Raum durchaus heachtliche Trägerdichten hervorrufen kann, die statische Messungen der hier vorliegenden Art vollkommen unmöglich machen würden.

Als Beispiel für zahlreiche Meßreihen ähnlicher Art zeigt Abb. 2 die gemessene Verschiebung des Strahlendes II in Abhängigkeit von J_1 , variiert durch verschiedene Heizung von K_1 . Alle übrigen Versuchsdaten sind konstant gehalten worden. Es betrugen $V_1 = V_2 = -10,3$ Volt, $J_{sp} = 2,20$ Amp., $r = 3,76$ mm. Die Meßpunkte liegen deutlich auf einer Geraden, wie es nach der oben erläuterten Formel (2), in der d proportional J_1 erscheint, zu erwarten war. Zum genaueren Vergleich zwischen Beobachtung und Rechnung kann man den Wert der Größe d/J_1 sowohl dem Diagramm, in dem

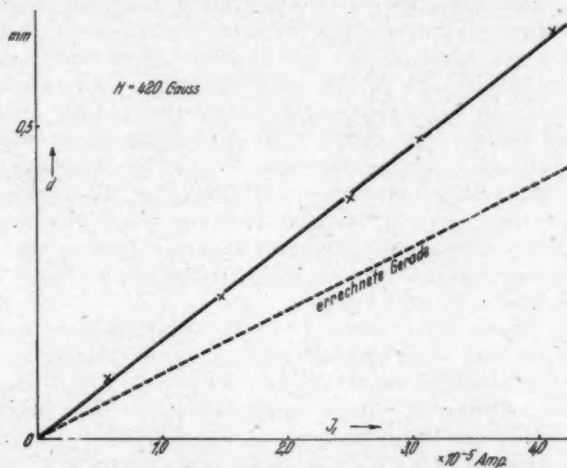


Abb. 2. Beispiel einer Meßreihe über die Verschiebung des Strahlendes II in Abhängigkeit von J_1

er als Steigung der Geraden enthalten ist, entnehmen, als auch für die bei dem Versuch benutzten Parameter nach (2) ausrechnen. Hierin ist für l_1 die Strecke von der Blende B bis zu der vordersten Kante von A_1 einzusetzen. Sie betrug 240 mm. Der Abstand r der beiden Strahlachsen wurde dem Abstand der Mittelpunkte der beiden Blendenöffnungen in B gleichgesetzt, der sich mit Hilfe eines Meßmikroskopes sehr genau ausmessen ließ. r betrug 3,76 mm. Leicht zu ermitteln war auch H aus den Dimensionen der langen Spule Sp und der durch sie hindurchgeschickten Stromstärke J_{sp} . Die Rechnung ergab $H = 420$ Gauss.

Erhebliche Schwierigkeiten bietet dagegen die Berechnung der in (2) einzusetzenden Strahlgeschwindigkeiten v_1 und v_2 . Während

nämlich bei nicht gewendelten Elektronenstrahlen die vorkommenden Strahlgeschwindigkeiten von dem aus Beschleunigungsspannung und Potentialverteilung auf der Glühkathode ermittelten Wert nur wenig abweichen können, enthalten Wendelstrahlen gewöhnlich alle Strahlgeschwindigkeiten zwischen Null und dem möglichen Höchstwert. Denn ein Teil der von den Elektronen beim Durchlaufen des Beschleunigungsfeldes aufgenommenen Energie entfällt auf ihre senkrecht auf der Strahlrichtung stehende Geschwindigkeitskomponente, die zur Strahlgeschwindigkeit nichts beiträgt. Um nun trotz dieser starken Inhomogenität der Wendelstrahlen bezüglich ihrer Geschwindigkeit die Formel (2) anwenden zu können, war zunächst in den Weg des Strahls *II* das oben erwähnte Geschwindigkeitsfilter eingebaut worden, so daß nur solche Elektronen, die nahezu den Höchstwert der Strahlgeschwindigkeit besitzen, in den Strahl *II* gelangen konnten. Bei Strahl *I* jedoch, bei dem es auf möglichst große Intensität ankam, war dieser Weg der Aussiebung eines engen Geschwindigkeitsbereiches nicht anwendbar. Hier mußte versucht werden, aus der besonders zu ermittelnden Verteilung der Strahlgeschwindigkeiten denjenigen Mittelwert von v_1 zu errechnen, der, in den Ausdruck J_1/v_1 eingesetzt, die wirkliche lineare Elektronendichte in Strahl *I* ergibt.

Zu diesem Zweck wurde der Strahl mit Hilfe eines variablen Gegenfeldes auf seine Zusammensetzung aus Elektronen verschiedener Geschwindigkeiten untersucht. Kurve *a* in Abb. 3 zeigt die auf dem Auffänger A_1 ankommende Intensität in Abhängigkeit von der durchlaufenen Gegenspannung. Graphische Differentiation dieser Kurve ergibt Kurve *b*, die die Geschwindigkeitsverteilung in Strahl *I* darstellt. Die von ihr begrenzte Fläche bedeutet die Gesamtintensität J_1 . Dividiert man die Ordinatenwerte der Kurve *b* durch die jedem Punkt zugehörige Geschwindigkeit, so erhält man eine neue Kurve *c*, die die Verteilung der linearen Ladungsdichte über den Geschwindigkeitsbereich des Strahls darstellt, während die von ihr begrenzte Fläche die gesamte lineare Ladungsdichte in dem Strahl *I* wiedergibt. Hieraus endlich läßt sich der in Formel (2) einzusetzende Wert von v_1 entnehmen. Für unser in der Abb. 2 dargestelltes Beispiel ergab sich $v_1 = 1,47 \cdot 10^9$ cm/sec.

Der auf diese Weise errechnete Wert für d/J_1 bestimmt die Steigung der gestrichelten Geraden in Abb. 2. Vergleicht man sie mit der gemessenen Geraden, so ist zunächst eine größenordnungsmäßige Übereinstimmung zwischen Erwartung und Messung festzustellen. Die Abweichung von etwa 30% liegt jedoch außerhalb der Fehlergrenze und ist eine systematische. Stets wurde die

Strahlablenkung bei der Messung größer gefunden, als der Rechnung entsprach. Diese Tatsache erklärt sich leicht, wenn man bedenkt, daß von vornherein mit dem Auftreten einer quantitativ nicht erfassbaren geringen Zahl von solchen Elektronen gerechnet werden muß, die nach Zusammenstoß mit einem Restgasmolekül oder nach Reflexion am Auffänger A_1 rückläufig werden und erst vom Kathodenfeld zum zweitenmal dem Auffänger zugetrieben werden.

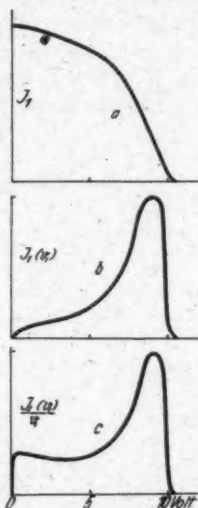


Abb. 3. Zur Ermittlung der Ladungsdichte in Strahl I

Zu Abb. 3:

- a) Gegenfeldkurve.
- b) Geschwindigkeitsverteilung der Intensität.
- c) Geschwindigkeitsverteilung der Ladungsdichte

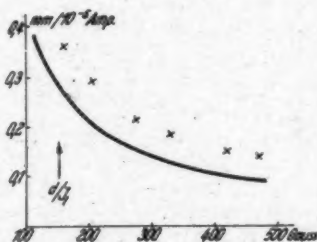


Abb. 4. Die Abhängigkeit der Verschiebung des Strahlendes II von der magnetischen Feldstärke H

Diese können im gemessenen J_1 natürlich nur einmal enthalten sein, während sie zur Ladungsdichte in Strahl I dreimal beitragen, wobei sich ihre Wirkung um so mehr bemerkbar machen wird, je größer ihr Verlust an Strahlgeschwindigkeit bei der Reflexion ist.

Während es, wie erwähnt, Schwierigkeiten machte, die Strahlgeschwindigkeit v_1 über einen größeren Bereich zu variieren, war dies z. B. bei der Spulenfeldstärke leicht möglich. Es wurden daher Meßreihen der in Abb. 2 dargestellten Art bei verschiedenen H im Bereich von 150—500 Gauss durchgeführt. Abb. 4 zeigt die hierbei gefundenen d/J_1 als Funktion von H . Die eingezeichnete Kurve stellt den nach der Rechnung erwarteten Zusammenhang

zwischen beiden Größen dar. Die bereits erläuterte Abweichung der gemessenen Werte scheint mit wachsendem H größer zu werden, ohne daß ein zwingender Grund hierfür angegeben werden könnte.

5. Zusammenfassung

Durch Anwendung der bereits früher zu statischen Messungen an Elektronenstrahlen benutzten „Wendelstrahlmethode“ gelingt es, die elektrische Abstoßung zwischen zwei parallel verlaufenden Elektronenstrahlen quantitativ zu verfolgen. Die beobachteten Wirkungen entsprechen im wesentlichen der Erwartung. Die geringe Abweichung zwischen Messung und Rechnung wird durch eine kleine rückläufige, im Versuch nicht erfaßbare Komponente der Wendelstrahlen erklärt.

Heidelberg, Philipp-Lenard-Institut.

(Eingegangen 6. Februar 1942)

Über die Drehung zweier Zylinder in einer zähen Flüssigkeit und die Theorie der Kräfte am Rotationsviskosimeter mit exzentrischen Zylindern

Von Wilhelm Müller

(Mit 7 Abbildungen)

1. Einleitung

Die stationäre Drehung eines oder zweier Kreiszyylinder in einer reibenden Flüssigkeit und die dabei auftretenden Kräfte spielen eine wichtige Rolle bei dem Problem der Zapfenreibung und der Zähigkeitsmessung. Da ich zu dem ersten, entsprechend verallgemeinerten Problem kürzlich einen neuen Beitrag¹⁾ geliefert habe, möchte ich die vorliegenden Betrachtungen in Beziehung setzen zur Theorie des Rotations-Viskosimeters, bei dem die flüssige oder gasförmige Prüfsubstanz den Zwischenraum zwischen zwei im allgemeinen konzentrisch angeordneten Kreiszyindern ausfüllt. Die wohl zuerst von M. Couette²⁾ und M. Margules³⁾ angegebene Methode ist seitdem in zahlreichen Arbeiten⁴⁾ weiterverfolgt und ausgebaut worden. Man kann dabei entweder Schwingungen oder stationäre Ausgleichsverfahren benutzen. Wenn das letztere Prinzip angeht, so wird im allgemeinen

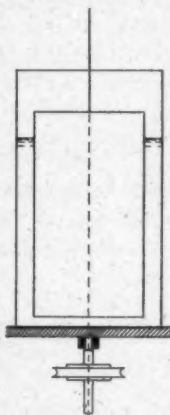


Abb. 1

1) Wilhelm Müller, Ebene Spannungs- und Strömungsfelder mit zwei kreisförmigen Grenzen. Ingen. Archiv. 13. S. 37. 1942.

2) M. Couette, Journ. de Phys. 9. S. 414. 1890; Mem. de Chim. et Phys. 21. S. 433.

3) M. Margules, Wiener Ber. 83 (IIa). S. 588. 1881.

4) C. Brodmann, Wiedem. Ann. 45. S. 159. 1892; G. Zemplen, Ann. d. Phys. 4. S. 38, 71. 1912; 49. S. 39. 1916; W. J. Harrison, Trans. Camb. Phil. Soc. 22. S. 39. 1913; E. L. Harrington, Phys. Rev. 8. S. 738. 1916, vgl. auch Hydrodynamics, Bullet. Nat. Res. Council. 84. S. 236. 1932; R. A. Millikan, Proc. Nat. Acad. Amer. 9. S. 87. 1923; Physik. Z. 24. S. 273. 1923; L. J. Stacy, Phys. Rev. (2) 21. S. 239. 1923; K. S. v. Dyke, Phys. Rev. 21. S. 250. 1923; M. N. States, Phys. Rev. 21. S. 662. 1923; E. Blankenstein, Phys. Rev. 22. S. 582. 1923; G. Kellström, Phil. Mag. (7) 23. S. 313. 1937; R. Inglis, Phys. Rev. (2) 56. S. 1041. 1939; A. R. Lee u. J. B. Warren, Journ. scient. instr. 17. Nr. 3. S. 63. 1940.

der äußere Teil, also in unserem Falle der äußere Zylinder in gleichmäßige, langsame Umdrehung versetzt, während der innere Zylinder an einem Stahldraht oder Quarzfaden torsiionsfähig aufgehängt wird. (Abb. 1). Bei der Drehung wird die am Zylinderrand haftende Flüssigkeit mitgenommen, die ihrerseits den inneren Zylinder um einen bestimmten Drehwinkel ϑ ablenkt, dessen Größe durch die Winkelgeschwindigkeit ω des äußeren Teiles und durch die Torsiionssteifigkeit des Drahtes bestimmt wird. Dabei kann durch einen besonderen Schwingungsversuch die Torsiionskonstante C der Aufhängung ermittelt werden. Bezeichnet man das Trägheitsmoment des inneren Zylinders mit Θ , die Schwingungsdauer mit T , so ergibt sich die Torsiionskonstante in der Form

$$(1) \quad C = \frac{4 \pi^2 \Theta}{T^2}.$$

Setzen wir nun für das vom äußeren Zylinder K_2 (mit dem Halbmesser r_2) durch Vermittlung der Flüssigkeitsreibung auf den inneren Zylinder K_1 (mit dem Halbmesser r_1) ausgeübte Drehmoment

$$(2) \quad M_{21} = 4 \pi \mu r_1 r_2 \omega c_{21},$$

wo μ den Reibungskoeffizienten und c_{21} , den entsprechenden dimensionslosen Beiwert bezeichnet, der vom Radienverhältnis $\frac{r_2}{r_1} = \lambda$ abhängt, so hat man zur Bestimmung von μ das Moment M_{21} , dem Torsiionsmoment gleichzusetzen und erhält dann

$$\frac{4 \pi^2 \Theta \vartheta}{T^2} = 4 \pi \mu r_1 r_2 \omega c_{21},$$

woraus

$$(3) \quad \mu = \frac{\pi \Theta \vartheta}{r_1 r_2 \omega c_{21} \cdot T^2}$$

sich ergibt. Die Bestimmungsmethode, die übrigens auch für Gase, z. B. Luft verwendet wurde, setzt also jedenfalls die Kenntnis der Größe c_{21} in Abhängigkeit von λ voraus. Außerdem ist es aber wünschenswert, auch den Einfluß der Exzentrizität e , bzw. des Verhältnisses $\varepsilon = \frac{e}{r_1}$ genauer kennenzulernen. Um die Gesetze für alle vorkommenden Fälle genauer zu studieren, wollen wir unter Vernachlässigung der Randeinflüsse zunächst den allgemeinen ebenen Fall der Rotation der Grenzzyylinder bei beliebigem Radienverhältnis und beliebiger Exzentrizität behandeln. Dieses Problem ¹⁾ geht natürlich weit

1) Vgl. G. B. Jeffery, Proc. London Math. Soc. (2), 14. S. 327. 1915; Proc. Roy. Soc. London, A 101. S. 169. 1922; G. Duffing, Z. angew. Math. u. Mech. 4. S. 297. 1924; R. A. Frazer, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 93. 1925—26; H. Reißner, Z. f. angew. Math. u. Mech. 15. S. 81. 1935; 16. S. 275.

über die besondere Anwendung auf Viskositätsmessung hinaus und umfaßt gleichzeitig auch den Fall der Schmiermittelreibung bei dem in einem kreiszylindrischen Lager rotierenden Zapfen. Der Vorteil der allgemeinen Behandlung des hydrodynamischen Problems, einschließlich der Berechnung der auftretenden Zähigkeitskräfte, liegt besonders darin, daß die beiden praktisch wichtigen und viel behandelten Grenzfälle, der Fall, daß die Exzentrizität klein ist gegen die mittlere Breite des Zwischenraumes und der Fall, daß beide Größen, Exzentrizität und Ringbreite klein sind gegen die Zylinderradien, in aller Strenge aus den allgemeinen Ansätzen abgeleitet werden können. Denn die bisherigen Versuche, diese Grenzfälle nach der Reynolds-Sommerfeldschen Methode ohne Rücksicht auf die Krümmungsverhältnisse auf direktem Wege abzuleiten, können, obwohl viele Ergebnisse richtig herauskommen, nicht als völlig korrekt bezeichnet werden. Auch die neueren Entwicklungen von Inglis, der nachträglich die Krümmung in Rechnung zu stellen suchte, bieten keinen befriedigenden Ersatz. In der vorliegenden Arbeit, einer Fortsetzung der bereits zitierten größeren Untersuchung über ebene Spannung- und Strömungsfelder, werde ich das für diesen Zweck natürlichste Hilfsmittel der krummlinigen, bipolaren Koordinaten heranziehen, das eine ebenso elegante wie umfassende Behandlung des Problems gestattet und u. a. zeigen, daß sich die Ausdrücke für die Kräfte und Momente in endlicher geschlossener Form darstellen lassen. Insbesondere wird die Hauptaufgabe darin bestehen, das vollständige System von Kräften aufzufinden, die in Verbindung mit der Rotation eines der beiden die Flüssigkeit begrenzenden Zylinder auftreten.

2. Bipolare Koordinaten und die grundlegende Differentialgleichung

Durch Vermittlung der Substitution

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} z = x + iy = ib \operatorname{ctg} \frac{\zeta}{2} = ib \frac{\sin \xi - i \sin \eta}{\cos \xi - \cos \eta} \\ \text{bzw.} \\ \zeta = \ln \frac{z + ib}{z - ib} = \ln \frac{R_2}{R_1} + i(\varphi_2 - \varphi_1) \end{array} \right.$$

wird das geradlinige Koordinatennetz der ζ -Ebene übergeführt in das Orthogonalnetz der beiden Kreisbüschel K_ξ und K_η der z -Ebene, d. h. die Schar der Apollonischen Kreise $\xi = \text{konst.}$, deren Punkte von den Polen $z = \pm ib$ Abstände von konstantem Verhältnis haben, und die Schar der durch die Pole hindurchgehenden Kreise $\eta = \text{konst.}$ (Abb. 2).

1936; D. Meksyn, Roy. Soc. Proc. London, A 162. S. 232. 1937; T. Sakurai, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan III, 20. S. 833. 1938; III 21. 43. S. 166. 1939; Japan Journ. of Phys. 13. Nr. 1, S. 13. 1939.

Im folgenden wird es sich nun in erster Linie um die Herstellung einer ebenen Strömung handeln, die von zwei bei endlichem b immer exzentrischen Kreisen $\xi = \alpha$ und $\xi = \beta$ begrenzt wird. Die Stromfunktion Ψ der stationären Strömung genügt der Differentialgleichung¹⁾

$$(7) \quad \mu \Delta \Delta \Psi = \rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial y} \right).$$

Wenn wir uns auf kleine Geschwindigkeiten beschränken und die quadratischen oder Trägheitsglieder vernachlässigen, so bleibt die Gleichung

$$(8) \quad \Delta \Delta \Psi = 0$$

übrig, deren Lösung uns zunächst interessieren wird. Die Geschwindigkeitskomponenten ergeben sich aus Ψ durch Differenzieren. Bei Einführung von bipolaren Koordinaten ξ, η haben die Komponenten in den ξ - und η -Richtungen mit der Abkürzung $h = \frac{b}{\cos \xi - \cos \eta}$ die Werte

$$(9) \quad v_{\xi} = \frac{1}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}; \quad v_{\eta} = -\frac{1}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}.$$

Aus der Druckgleichung

$$(10) \quad \text{grad } p = \mu \Delta b$$

ergibt sich ferner

$$(11) \quad \frac{\partial p}{\partial \xi} = \mu \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} = -\mu \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial \xi}.$$

Um auch $\Delta \Psi$ und $\Delta \Delta \Psi$ auf bipolare Koordinaten umzurechnen, benutzt man die Beziehungen

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta} = -\frac{b \sin \xi \sin \eta}{(\cos \xi - \cos \eta)^2}; \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = -\frac{\partial x}{\partial \eta} = b \frac{(1 - \cos \xi \cos \eta)}{(\cos \xi - \sin \eta)^2}$$

und erhält dann mit der Bezeichnung

$$\Delta^* \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2}$$

durch eine einfache, wenn auch umständliche Rechnung die Ausdrücke

$$(12) \quad \Delta \Psi = \frac{1}{h^2} \Delta^* \Psi,$$

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta \Delta \Psi &= \frac{1}{h^4} \left\{ \frac{1}{h^2} \Delta^* \Delta^* \Psi + \frac{4}{b^2} (\cos^2 \xi - \cos^2 \eta) \Delta^* \Psi \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{b^2} (\cos \xi - \cos \eta) \left[\sin \xi \frac{\partial \Delta^* \Psi}{\partial \xi} + \sin \eta \frac{\partial \Delta^* \Psi}{\partial \eta} \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

1) Vgl. Wilhelm Müller, Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten, Leipzig 1932, S. 82.

Es ist nun vorteilhaft, die Stromfunktion ψ in der Form

$$\psi = h \Phi$$

anzusetzen. Dann ergibt sich

$$(14) \Delta \psi = \frac{1}{h} \Delta^* \Phi + \frac{1}{b} (\zeta \cos \xi + \cos \eta) \Phi - \frac{2}{b} \left(\zeta \sin \xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \sin \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)$$

und für die reduzierte Funktion Φ die Differentialgleichung

$$(15) \Delta \Delta \psi = \frac{1}{h^2} \left\{ \Delta^* \Delta^* \Phi + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \Phi \right\} = 0$$

3. Aufbau der Stromfunktion aus Elementarintegralen¹⁾

Es läßt sich zeigen, daß die Funktion Φ , wenn sie nur von ξ abhängt, als lineare Verbindung von vier partikulären Integralen der Gl. (15) in der Form

$$\Phi = A \zeta \cos \xi + B \zeta \sin \xi + C \xi \zeta \cos \xi + D \xi \zeta \sin \xi$$

dargestellt werden kann. Andere Integrale lassen sich als Produkte zweier Funktionen von ξ bzw. η schreiben in der Form

$$\Phi = (A \cos m \eta + B \sin m \eta) [A' \zeta \cos(m+1)\xi + B' \zeta \cos(m-1)\xi + C' \zeta \sin(m+1)\xi + D' \zeta \sin(m-1)\xi].$$

Für $m = 1$ gibt die charakteristische Frequenzgleichung eine Doppelwurzel und man hat dann

$$\Phi = (A \cos \eta + B \sin \eta) (A' \zeta \cos 2\xi + B' \zeta \sin 2\xi + C' \xi + D').$$

Mit Rücksicht auf das besondere vorliegende Randwertproblem wollen wir die Stromfunktion als lineare Verbindung von acht einfachen Partikularintegralen der angegebenen Art ansetzen:

$$(16) \begin{cases} \psi = h [(A + B\xi + C\zeta \cos 2\xi + D\zeta \sin 2\xi) \cos \eta + E \zeta \sin \xi \\ + G \zeta \cos \xi + F \xi \zeta \cos \xi + H \xi \zeta \sin \xi] = h [\Phi_1 \cos \eta + \Phi_2] \end{cases}$$

und uns zunächst mit der Frage der eindeutigen Bestimmbarkeit der auftretenden Koeffizienten beschäftigen. Für die Geschwindigkeitskomponenten in einem Punkt des Kreises $\xi = \alpha$ haben wir nach (9)

$$(17) \begin{cases} (v_\xi)_\alpha = -\sin \eta \frac{\Phi_1(\alpha) \zeta \cos \alpha + \Phi_2(\alpha)}{\zeta \cos \alpha - \cos \eta}; \\ (-v_\eta)_\alpha = \left(\frac{d\Phi_1}{d\xi} \right)_\alpha \cos \eta + \left(\frac{d\Phi_2}{d\xi} \right)_\alpha - \frac{\sin \alpha [\Phi_1(\alpha) \cos \eta + \Phi_2(\alpha)]}{\zeta \cos \alpha - \cos \eta} \end{cases}$$

Wenn man nun verlangt, daß man auf den Kreisen $\xi = \alpha$ und $\xi = \beta$ die Normalkomponenten v_ξ verschwinden, während $v_\eta = -v_1$ wird für $\xi = \alpha$ und $v_\eta = 0$ für $\xi = \beta$, so ergeben sich die Bestimmungsgleichungen

1) J. Krettner, Beitrag zum Problem der ebenen langsamen Strömung und des ebenen Spannungszustandes, Diss. München 1941; ferner E. Weinert, Z. f. ang. Math. u. Mech. 17. S. 276. 1937.

$$(18) \left\{ \begin{array}{l} \Phi_1(\alpha) \cos \alpha + \Phi_2(\alpha) = 0; \quad \Phi_1(\beta) \cos \alpha + \Phi_2(\beta) = 0; \\ \left(\frac{d\Phi_1}{d\xi} \right)_\alpha = \left(\frac{d\Phi_1}{d\xi} \right)_\beta = 0 \quad \left(\frac{d\Phi_1}{d\xi} \right)_\alpha + \sin \alpha \Phi_1(\alpha) = v_1; \\ \left(\frac{d\Phi_2}{d\xi} \right)_\alpha + \sin \beta \Phi_1(\beta) = 0. \end{array} \right.$$

Führt man für Φ_1 und Φ_2 die oben angegebenen Funktionen ein, so geht (18) in die folgenden sechs Bestimmungsgleichungen für die Konstanten über, die noch durch eine siebente Gleichung ergänzt werden können, die zum Ausdruck bringt, daß der Wert von ψ für $\xi = \beta$ oder auch $\Phi(\beta)$ den Wert Null annehmen soll. Wenn wir im Fall der Rotation des Zylinders K , die Konstanten mit dem Index 1 versehen, so erhält man

$$(19) \left\{ \begin{array}{l} B_1 + 2C_1 \sin 2\alpha + 2D_1 \cos 2\alpha = 0; \\ B_1 + 2C_1 \sin 2\beta + 2D_1 \cos 2\beta = 0; \\ (A_1 + B_1 + C_1 \cos 2\alpha + D_1 \sin 2\alpha) \cos \alpha + E_1 \sin \alpha \\ \quad + F_1 \alpha \cos \alpha + G_1 \cos \alpha + H_1 \alpha \sin \alpha = 0; \\ A_1 + B_1 \beta + C_1 \cos 2\beta + D_1 \sin 2\beta = 0; \\ E_1 \sin \beta + F_1 \beta \cos \beta + G_1 \cos \beta + H_1 \beta \sin \beta = 0; \\ A_1 + B_1 \alpha + C_1 \cos 2\alpha + D_1 \sin 2\alpha + E_1 \cos \alpha \\ \quad + F_1 (\alpha \sin \alpha + \cos \alpha) + G_1 \sin \alpha + H_1 (\alpha \cos \alpha + \sin \alpha) = v_1; \\ E_1 \cos \beta + F_1 (\beta \sin \beta + \cos \beta) + G_1 \sin \beta \\ \quad + H_1 (\beta \cos \beta + \sin \beta) = 0. \end{array} \right.$$

Die achte Gleichung ergibt sich aus der Stetigkeitsforderung für den Druckverlauf. Durch Integration der aus (10 a) sich ergebenden Gleichungen ergibt sich für den Druckverlauf längs eines Kreises K_p von einer unbestimmten Konstanten abgesehen

$$(20) \left\{ \begin{array}{l} p = \frac{2\mu}{h} \{ \sin 2\eta (C_1 \sin 2\xi + D_1 \cos 2\xi) \\ \quad + \sin \eta [(B_1 + F_1 - 2D_1) \cos \xi + (H_1 - 2C_1) \sin \xi] - (B_1 + F_1) \eta \}. \end{array} \right.$$

Wenn im Scheitelpunkt $\eta = \pm \pi$ der Druck einen stetigen Verlauf haben d. h. nach einmaligem Umlauf in den ursprünglichen Wert übergehen soll, so muß

$$(19a) \quad B_1 + F_1 = 0$$

werden. Damit sind die acht Gleichungen aufgestellt, die eine eindeutige Bestimmung der Koeffizienten $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1, H_1$ zulassen. Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} L_1 &= (\alpha - \beta) \sin \alpha - \sin \beta \sin (\alpha - \beta); \\ N &= \sin (\alpha - \beta) [(\alpha - \beta) (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) - 2 \sin \alpha \sin \beta \sin (\alpha - \beta)] \\ I_1 &= \frac{v_1 L_1}{2N} \end{aligned}$$

erhalten wir folgende Ausdrücke für die Konstanten

$$(21) \quad \begin{cases} A_1 = I_1 [2\beta \operatorname{Coj}(\alpha - \beta) + \sin(\alpha - \beta)]; \\ B_1 = -F_1 = -2I \operatorname{Coj}(\alpha - \beta); \\ C_1 = -I_1 \sin(\alpha + \beta); \quad D_1 = I_1 \operatorname{Coj}(\alpha + \beta); \\ NH_1 = -v_1 \sin \beta \sin^2(\alpha - \beta); \\ NE_1 = v_1 [\beta \operatorname{Coj} \alpha (\sin \alpha \operatorname{Coj} \beta - \sin^2 \beta \sin(\alpha - \beta)) \\ \quad - \alpha \sin \alpha \operatorname{Coj}^2 \beta \operatorname{Coj}(\alpha - \beta) + \sin \beta \operatorname{Coj} \beta \operatorname{Coj} \alpha \sin(\alpha - \beta)]; \\ NG_1 = -v_1 [\beta(\alpha - \beta) \sin \alpha \operatorname{Coj}(\alpha - \beta) \\ \quad - (\alpha - \beta) \sin \alpha \operatorname{Coj} \beta \sin \beta \operatorname{Coj}(\alpha - \beta) \\ \quad - \beta \sin \beta \sin(\alpha - \beta) \operatorname{Coj}(\alpha - \beta) + \operatorname{Coj} \alpha \sin^2 \beta \sin(\alpha - \beta)]. \end{cases}$$

Setzt man diese Werte in (16) ein, so ergibt sich nach entsprechender Zusammenfassung die Stromfunktion in der Form

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} N \cdot \frac{\Psi(\operatorname{Coj} \xi - \cos \eta)}{b v_1} &= [(\xi - \beta) \operatorname{Coj}(\alpha - \beta) (\operatorname{Coj} \xi - \cos \eta) \\ &\quad - \sin(\xi - \beta) \operatorname{Coj} \beta \operatorname{Coj}(\alpha - \beta) + \sin(\xi - \beta) \operatorname{Coj}(\xi - \alpha) \cos \eta] \\ &\quad \cdot [(\alpha - \beta) \sin \alpha - \sin \beta \sin(\alpha - \beta)] \\ &\quad + \sin^2(\alpha - \beta) \sin \beta [\sin \beta \sin(\xi - \beta) - (\xi - \beta) \sin \xi]. \end{aligned} \right.$$

Wenn dagegen der äußere Zylinder mit einer Umfangsgeschwindigkeit v_2 rotiert, so erhalten wir die zugehörige Stromfunktion aus (22) durch Vertauschung von α und β :

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} N \cdot \frac{\Psi(\operatorname{Coj} \xi - \cos \eta)}{b v_2} &= [(\xi - \alpha) \operatorname{Coj}(\alpha - \beta) (\operatorname{Coj} \xi - \cos \eta) \\ &\quad - \sin(\xi - \alpha) \operatorname{Coj} \alpha \operatorname{Coj}(\alpha - \beta) + \sin(\xi - \alpha) \operatorname{Coj}(\xi - \beta) \cos \eta] \\ &\quad \cdot [\sin \alpha \sin(\alpha - \beta) - (\alpha - \beta) \sin \beta] \\ &\quad + \sin^2(\alpha - \beta) \sin \alpha [\sin \alpha \sin(\xi - \alpha) - (\xi - \alpha) \sin \xi]. \end{aligned} \right.$$

Die dadurch gewonnenen Stromfunktionen umfassen eine große Anzahl von Sonderfällen, z. B. auch die hier unberücksichtigt gelassenen Fälle, wo z. B. β negativ wird, also die Kreise auseinander liegen.

4. Berechnung der Kräfte und Momente, die in Verbindung mit der Drehung eines Zylinders auftreten

Um die Kraftwirkung zu bestimmen, benötigen wir die aus dem Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeiten ableitbaren Randspannungen an einem Oberflächenelement der Zylinder. Die auf krummlinige Koordinaten (ξ, η) umgerechneten Verzerrungskomponenten¹⁾ ε_{ξ} und $\gamma_{\xi\eta}$ haben die Werte

1) Vgl. Handbuch der Physik, Bd. VI, Berlin 1928, S. 78.

$$(24) \quad \begin{cases} \varepsilon_z = \frac{1}{h} \frac{\partial v_z}{\partial \xi} - \frac{\sin \eta}{b} v_\eta; \\ 2\gamma_{z\eta} = \frac{1}{h} \frac{\partial v_z}{\partial \eta} + \frac{1}{h} \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} + \frac{v_\eta}{b} \sin \xi + \frac{v_z \sin \eta}{b}. \end{cases}$$

Damit werden die Normal- und Tangentialspannungen in einem Element der Begrenzung

$$(25) \quad \sigma_z = -p + 2\mu \varepsilon_z; \quad \tau_{z\eta} = 2\mu \gamma_{z\eta}.$$

Wenn z. B. der Kreis K_1 rotiert, so wird $v_z = 0$, ferner haben wir wegen

$$\left(\frac{\partial v_z}{\partial \eta} \right)_a = -(\Phi_1 \cos \alpha + \Phi_2) \frac{\cos \alpha \cos \eta - 1}{\cos \alpha - \cos \eta} = 0$$

die Beziehung

$$\left(\frac{1}{h} \frac{\partial v_z}{\partial \xi} - \frac{\sin \eta}{b} v_\eta \right)_{z=a} = -\frac{\sin \eta}{h} \left(\frac{d\Phi_1}{d\xi} \right)_a = 0.$$

Daher wird

$$(26) \quad \sigma_z = -p; \quad \tau = \mu \left[\frac{1}{h} \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} + \frac{v_\eta}{r_1} \right].$$

Aus

$$-v_\eta = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{\sin \xi \Phi(\xi)}{\cos \xi - \cos \eta}$$

ergibt sich

$$-\frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} - \frac{\sin \xi}{\cos \xi - \cos \eta} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{1 - \cos \xi \cos \eta}{(\cos \xi - \cos \eta)^2} \Phi.$$

Daraus wegen

$$\Phi_2(\alpha) = -\Phi_1(\alpha) \cos \alpha; \quad \left(\frac{d\Phi_1}{d\xi} \right)_a = 0; \quad \left(\frac{d\Phi_2}{d\xi} \right)_a = v_1 - \sin \alpha \cdot \Phi_1(\alpha)$$

schließlich

$$(27) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} \right)_a = \Phi_2(\alpha) - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{v_1 \sin \alpha}{\cos \alpha - \cos \eta}; \\ \frac{1}{h} \left(\frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} \right)_a + \frac{v_z}{r_1} = -\frac{2}{b} (\cos \alpha - \cos \eta) \\ \cdot [2C_1 \cos 2\alpha + 2D_1 \sin 2\alpha \cos \eta + F_1 \sin \alpha + H_1 \cos \alpha]. \end{cases}$$

Nach Einsetzung der Werte für C_1 und D_1 erhalten wir schließlich für die Normal- und Tangentialkomponenten der Spannung bzw. für den Druck und die Reibungsspannung die Ausdrücke

$$(28) \quad p = \frac{2\mu}{b} [I_2 \cos(\alpha - \beta) \sin 2\eta - [2I_1 \cos \beta - H_1 \sin \alpha] \sin \eta],$$

$$(29) \quad \begin{cases} \tau = -\frac{2\mu}{b} (\cos \alpha - \cos \eta) [2I_1 \sin(\alpha - \beta) \cos \eta \\ + 2I_1 \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha + H_1 \cos \alpha]. \end{cases}$$

Man sieht ohne weiteres, daß bei der Integration über den Umfang des Kreises K_1 die in die Richtung der Zentralen fallende y -Kompo-

nente der Kraft verschwindet, da die beiden Seiten symmetrisch zum Durchmesser $\eta = 0, \pm \pi$ entgegengesetzte gleiche Beträge liefern. Es bleibt also für die Resultierende und das Drehmoment

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{11} = -r_1 \int_0^{2\pi} p \cos \varphi d\varphi - r_1 \int_0^{2\pi} \tau \sin \varphi d\varphi \\ M_{11} = r_1^2 \int_0^{2\pi} \tau d\varphi. \end{array} \right.$$

Wenn man nach (6)

$$d\varphi = -\frac{\sin \alpha d\eta}{\cos \alpha - \cos \eta}; \quad \cos \varphi d\varphi = -\sin^2 \alpha \frac{\sin \eta d\eta}{(\cos \alpha - \cos \eta)^2};$$

$$\sin \varphi d\varphi = \sin \alpha \frac{1 - \cos \alpha \cos \eta}{(\cos \alpha - \cos \eta)^2}$$

setzt und die bekannten Integrale

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin^2 \eta d\eta}{(\cos \alpha - \cos \eta)^2} = 2\pi (\operatorname{Ctg} \alpha - 1); \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin^2 \eta \cos \eta d\eta}{(\cos \alpha - \cos \eta)^2} = 2\pi \sin (\operatorname{Ctg} \alpha - 1)^2; \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(1 - \cos \alpha \cos \eta) d\eta}{\cos \alpha - \cos \eta} = 2\pi (\cos \alpha - \sin \alpha); \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(1 - \cos \alpha \cos \eta) \cos \eta d\eta}{\cos \alpha - \cos \eta} = 2\pi \sin \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha), \end{array} \right.$$

benutzt, so erkennt man, daß in dem Ausdrucke für P alle Glieder mit dem Koeffizienten I_1 sich wegheben und im Endresultat nur die Konstante H_1 auftritt. Wegen $r_1 = \frac{b}{\sin \alpha}$ läßt sich P schließlich in die einfache Form

$$(32) \quad P_{11} = -4\pi\mu H_1 = \frac{4\pi\mu v_1 \sin \beta \sin (\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta) (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) - 2 \sin \alpha \sin \beta \sin (\alpha - \beta)}$$

setzen. Die im Mittelpunkt des Kreises K_1 angreifend zu denkende Kraft ist, wie man erkennt, nach der Seite der divergierenden Strömung zwischen den Zylindern gerichtet. Einfacher noch gestaltet sich die Berechnung des widerstehenden Momentes, das nur von den beiden Konstanten F_1 und H_1 abhängig ist. Man erhält

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{11} = -4\pi\mu r_1 (F_1 \sin \alpha + H_1 \cos \alpha) \\ = -4\pi\mu v_1 r_1 \frac{(\alpha - \beta) \sin^2 \alpha \cos (\alpha - \beta) - \sin (\alpha - \beta) [\sin^2 \alpha - \sin^2 (\alpha - \beta)]}{\sin (\alpha - \beta) [(\alpha - \beta) (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) - 2 \sin \alpha \sin \beta \sin (\alpha - \beta)]} \end{array} \right.$$

Um nun weiter die Wirkung der Drehung von K_1 auf den Kreis K_2 mitzubestimmen, gehen wir von den Ausdrücken für p und τ aus, die aus den früheren Formeln dadurch hervorgehen, daß wir die Konstanten ungeändert lassen und in den Koeffizienten von I und H α durch β ersetzen. Man erhält dann mit

$$(34) \quad \begin{cases} p = \frac{2\mu}{b} \{ I_1 \cos(\alpha - \beta) \sin 2\eta - (2I_1 \cos \alpha - H_1 \sin \beta) \sin \eta \} \\ \tau = \frac{2\mu}{b} (\cos \beta - \cos \eta) [-2I_1 \sin(\alpha - \beta) \cos \eta \\ + 2I_1 \cos(\alpha - \beta) \sin \beta + H_1 \cos \beta] \end{cases}$$

die Integrale

$$P_{12} = r_2 \int_0^{2\pi} p \cos \varphi - r_2 \int_0^{2\pi} \tau \sin \varphi d\varphi; \quad M_{12} = r_2^2 \int_0^{2\pi} \tau d\varphi.$$

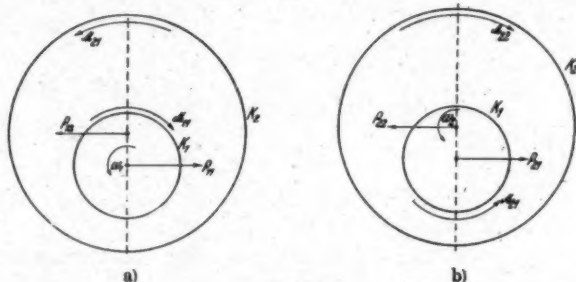


Abb. 3

Mit Hilfe der (6) entsprechenden Formeln erhält man wie oben für die im Zentrum von K_2 angreifende Kraft

$$(35) \quad P_{12} = 4\pi\mu H_1 = -P_{21},$$

also den entgegengesetzten gleichen Wert wie für die auf K_1 wirkende Kraft. Ferner wird das durch Vermittlung der Flüssigkeit auf K_2 einwirkende Drehmoment

$$(36) \quad M_{12} = 4\pi\mu r_2 v_1 \frac{\sin \alpha \sin \beta [(\alpha - \beta) \cos(\alpha - \beta) - 1]}{(\alpha + \beta) (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) - 2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha - \beta)}.$$

Die Formeln (32) bis (36) gelten für den verallgemeinerten Zapfenfall bei beliebigem Radienverhältnis und beliebiger Exzentrizität beider Zylinder¹⁾. Zwischen den vier Ausdrücken für die Kräfte und Momente besteht eine einfache Beziehung, die mit Rücksicht auf das Vorzeichen folgendermaßen lautet

$$(37) \quad M_{11} + M_{22} + P_{11} \varepsilon r_1 = 0.$$

1) Wilhelm Müller, a. a. O.

Sie steht ebenso wie mit (35) im Einklang mit dem bekannten *Impulssatz* der Hydrodynamik, den wir auf das von den beiden Zylindern eingeschlossene Flüssigkeitsgebiet anwenden können und der besagt, daß der in diesem Falle verschwindende Impulsfluß durch die Grenzen bzw. sein Moment der Summe der Kräfte bzw. der Drehmomente gleich sein muß¹⁾.

In derselben Weise lassen sich auch die Kräfte P_{21} , P_{22} und Momente M_{21} , M_{22} bestimmen, die erzeugt werden von der Rotation des äußeren Zylinders K_2 . Man braucht nur in den entsprechenden Ausdrücken, also z. B. in den Konstanten A, B usw. des ersten Falles die Parameter α und β zu vertauschen und v_1 durch die Geschwindigkeit v_2 des äußeren Zylinders zu ersetzen. Bezeichnet man die Konstanten des vorliegenden Falles mit dem Index 2, so hat man z. B. für die Werte p und τ am rotierenden äußeren Zylinder

$$(38) \quad \begin{cases} p = \frac{2\mu}{b} [I_2 \cos(\alpha - \beta) \sin 2\eta - (2I_2 \cos \alpha - H_2 \sin \beta) \sin \eta] \\ \tau = \frac{2\mu}{b} (\cos \beta - \cos \eta) [-2I_2 \sin(\alpha + \beta) \\ \quad + 2I_2 \cos(\alpha - \beta) \sin \beta + H_2 \cos \beta]. \end{cases}$$

Dann ergibt sich

$$P_{22} = \tau_2 \int_0^{2\pi} p \cos \varphi d\varphi - \tau_2 \int_0^{2\pi} \tau \sin \varphi d\varphi; \quad M_{22} = \tau_2 \int_0^{2\pi} \tau d\varphi$$

und nach Einführung von η wie oben nach einer entsprechenden Umrechnung

$$(39) \quad P_{22} = -4\pi\mu v_2 \frac{\sin \alpha \sin(\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) + 2\sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha - \beta)},$$

$$(40) \quad M_{22} = -4\pi\mu \tau_2 v_2 \frac{(\alpha - \beta) \cos(\alpha - \beta) \sin^2 \beta - (\sin^2 \beta - \sin^2(\alpha - \beta))}{\sin(\alpha - \beta)[(\alpha - \beta)(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) - 2\sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha - \beta)]}.$$

Dabei ist wieder

$$(41) \quad \begin{aligned} P_{21} &= -P_{22} \\ M_{22} + M_{21} + P_{21} \varepsilon \tau_2 &= 0. \end{aligned}$$

Damit ist das vollständige System der Kräfte und Momente bei Rotation je eines der beiden Zylinder ermittelt.

o. Reduktion und Diskussion der Formeln

Zur Reduktion der Ausdrücke ist es zunächst zweckmäßig, das Radienverhältnis $\lambda = \frac{r_2}{r_1}$ und die Größe $\frac{c}{r_1} = \varepsilon$ einzuführen. Statt λ verwende ich gelegentlich auch die Größe $x = \lambda - 1$, die als dimen-

1) Wilhelm Müller, Ann. d. Phys. [5] 16. S. 489. 1933.

sionsloses Maß für die mittlere Breite des ringförmigen Zwischenraumes zwischen den Kreisen K_1 und K_2 angesehen werden kann. Wir haben zunächst nach (5) definitionsgemäß

$$(42a) \quad \sin \beta = \frac{\sin \alpha}{\lambda}; \quad s = \sin \alpha (\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha) = \frac{\sin (\alpha - \beta)}{\sin \beta}.$$

Daraus fließen dann die Formeln

$$(42b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{\lambda^2 - s^2 - 1}{2s}; \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{(\lambda^2 - 1)^2 - s^2} ((\lambda + 1)^2 - s^2)}{2s}; \\ \sin (\alpha - \beta) = \frac{s}{\lambda} \sin \alpha; \quad \cos \beta = \frac{\lambda^2 - 1 + s^2}{2s\lambda}; \\ \cos (\alpha - \beta) = \frac{\lambda^2 + 1 - s^2}{2\lambda}; \quad \operatorname{ctg} (\alpha - \beta) = \frac{1 + s \cos \alpha}{s \sin \alpha} = \frac{\lambda^2 + 1 - s^2}{2s \sin \alpha}. \end{array} \right.$$

Wenn man mit ihrer Hilfe unsere Ausdrücke (32) bis (40) umgestaltet und die dimensionslosen Beiwerte für die absolut genommenen Momente in der Form

$$M_{ik} = 4\pi\mu r_1 r_2 \omega_i (c_m)_{ik}$$

einführt, so erhält man bei möglichst einfacher Schreibweise folgende Ausdrücke

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} (c_m)_{11} = \frac{\lambda \left[(\alpha - \beta) \operatorname{ctg} (\alpha - \beta) - 1 + \frac{s^2}{\lambda^2} \right]}{(\alpha - \beta)(\lambda^2 + 1) - 2s \sin \alpha} \\ \quad = \frac{\lambda}{2s \sin \alpha} \left\{ 1 - \frac{s^2 [(\alpha - \beta) \lambda^2 - 2s \sin \alpha]}{\lambda^2 [(\alpha - \beta)(\lambda^2 + 1) - 2s \sin \alpha]} \right\}; \\ (c_m)_{22} = \frac{\lambda [(\alpha - \beta) \operatorname{ctg} (\alpha - \beta) - 1 + s^2]}{(\alpha - \beta)(\lambda^2 + 1) - 2s \sin \alpha} \\ \quad = \frac{\lambda}{2s \sin \alpha} \left\{ 1 - \frac{s^2 [(\alpha - \beta) - 2s \sin \alpha]}{(\alpha - \beta)(\lambda^2 + 1) - 2s \sin \alpha} \right\} \\ (c_m)_{12} = (c_m)_{21} = \frac{\lambda [(\alpha - \beta) \operatorname{ctg} (\alpha - \beta) - 1]}{(\alpha - \beta)(\lambda^2 + 1) - 2s \sin \alpha} \\ \quad = \frac{\lambda}{2s \sin \alpha} \left\{ 1 - \frac{(\alpha - \beta)s^2}{(\alpha - \beta)(\lambda^2 + 1) - 2s \sin \alpha} \right\}. \end{array} \right.$$

Mit

$$\begin{aligned} P_{11} &= 4\pi\mu r_1 \omega_1 (c_p)_{11}; & P_{12} &= 4\pi\mu r_2 \omega_1 (c_p)_{12} \\ P_{21} &= 4\pi\mu r_2 \omega_2 (c_p)_{21}; & P_{22} &= 4\pi\mu r_2 \omega_2 (c_p)_{22} \end{aligned}$$

wird ferner

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} (c_p)_{11} = (c_p)_{22} = \frac{s}{(\alpha - \beta)(\lambda^2 + 1) - 2s \sin \alpha}; \\ (c_p)_{21} = (c_p)_{12} = \frac{s\lambda}{(\alpha - \beta)(\lambda^2 + 1) - 2s \sin \alpha}. \end{array} \right.$$

Wir wollen etwa den Fall der Rotation des äußeren Zylinders betrachten, der im allgemeinen beim Rotations-Viskosimeter vorkommt.

Dabei interessiert vor allem die Abhängigkeit der Momente bzw. deren Beiwerte $(c_{\infty})_{22}$ und $(c_{\infty})_{21}$ von der Exzentrizität bei gegebenem Radienverhältnis. Die Exzentrizitätszahl ε kann von Null bis zum Werte $\varepsilon = \alpha = \lambda - 1$ wachsen, wobei dieser größte Wert dem praktisch nicht realisierbaren Fall der Berührung der beiden Kreise entspricht. Wenn ε verschwindet, so werden, wie man aus den Formeln erkennt, die Größen $\text{Sin } \alpha = \text{Cos } \alpha$ unendlich groß, während

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\varepsilon \text{Cos } \alpha)_{\varepsilon \rightarrow 0} = (\varepsilon \text{Sin } \alpha)_{\varepsilon \rightarrow 0} = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1); \\ [\text{Etg } (\alpha - \beta)]_{\varepsilon \rightarrow 0} = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1} \end{array} \right.$$

endlich bleiben. Dann hebt sich aber aus dem Zähler und Nenner der Ausdrücke (43b) der Faktor $(\alpha - \beta)(\lambda^2 + 1) - (\lambda^2 - 1)$ heraus, und es bleibt die bekannte Formel für den Couetteschen Fall übrig:

$$(46) \quad (M_{21})_{\varepsilon=0} = (M_{22})_{\varepsilon=0} = 4\pi\mu r_1 r_2 \omega \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} = 4\pi\mu \frac{r_1^3 r_2^3}{r_2^3 - r_1^3}.$$

Für den anderen Grenzfall $\varepsilon = \alpha = \lambda - 1$ nähert sich $\text{Sin } \alpha$ der Null. Führt man die Reihenentwicklung

$$(47) \quad \alpha - \beta = \frac{\varepsilon}{\lambda} \text{Sin } \alpha \left(1 - \frac{1}{6} \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2} \text{Sin}^2 \alpha + \dots \right) \sim \frac{\varepsilon}{\alpha + 1} \text{Sin } \alpha$$

ein, ferner

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Cos } (\alpha - \beta) = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2\lambda^2} \text{Sin}^2 \alpha + \dots; \\ \text{Etg } (\alpha - \beta) = \frac{1 + \frac{\varepsilon^2}{2\lambda^2} \text{Sin}^2 \alpha + \dots}{\frac{\varepsilon}{\lambda} \text{Sin } \alpha}, \end{array} \right.$$

so wird

$$(49) \quad (\alpha - \beta) \text{Etg } (\alpha - \beta) = 1 + \frac{1}{3} \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2} \text{Sin}^2 \alpha + \dots$$

Setzt man diese Näherungswerte in (43) ein, so sieht man, daß $(c_{\infty})_{21}$ für $\varepsilon = \alpha$ verschwindet, während $(c_{\infty})_{22}$ unendlich groß wird. Wie weiter unten genauer nachgewiesen werden soll, zeigen die beiden, auf die Zylinder wirkenden Momente, die bei verschwindender Exzentrizität einander gleich sind, mit wachsender Exzentrizität verschiedenes Verhalten. Während das auf K_2 wirkende widerstehende Moment M_{22} zunächst langsam, dann immer stärker anwächst und mit $\varepsilon = \alpha$ theoretisch unendlich groß wird, nimmt das Moment M_{21} ab und verschwindet schließlich für $\varepsilon = \alpha$. Dieses Verhalten steht zwar im Widerspruch mit gewissen Rechnungen von Couette, ist aber neuerdings durch sorgfältige Versuche von Kellström (s. o.) im Bereiche

Zahlentafel für die Beiwerte der Momente und Kräfte

ε	$\alpha = 0,2$			$\alpha = 0,3$			$\alpha = 0,4$			$\alpha = 0,5$			$\alpha = 0,6$		
	$(c_m)_{22}$	$(c_m)_{21}$	c_p	$(c_m)_{22}$	$(c_m)_{21}$	c_p	$(c_m)_{22}$	$(c_m)_{21}$	c_p	$(c_m)_{22}$	$(c_m)_{21}$	c_p	$(c_m)_{22}$	$(c_m)_{21}$	c_p
0	2,723	2,723	0	1,882	1,882	0	1,460	1,460	0	1,200	1,200	0	1,026	1,026	0
0,05	3,173	2,558	12,36	2,038	1,824	4,17	1,532	1,436	1,95	1,390	1,169	2,21	1,142	1,010	1,42
0,1	4,698	2,108	26,31	2,525	1,693	8,34	1,765	1,374	3,90	1,390	1,169	2,21	1,142	1,010	1,42
0,15	7,942	1,426	43,46	3,390	1,457	13,12	2,798	1,128	7,98	1,910	1,014	4,48	1,485	0,915	2,83
0,2	∞	0	∞	4,782	1,157	18,14	4,890	0	∞	2,788	0,773	6,72	2,118	0,810	4,84
0,3							∞	0,761	13,76	∞	0,561	11,42	3,114	0,651	6,20
0,4										∞	0	∞	5,084	0,456	9,25
0,5															
0,6															

ε	$\alpha = 0,7$			$\alpha = 0,8$			$\alpha = 0,9$			$\alpha = 1,0$		
	$(c_m)_{22}$	$(c_m)_{21}$	c_p	$(c_m)_{22}$	$(c_m)_{21}$	c_p	$(c_m)_{22}$	$(c_m)_{21}$	c_p	$(c_m)_{22}$	$(c_m)_{21}$	c_p
0	0,899	0,899	0	0,804	0,804	0	0,728	0,728	0	0,667	0,667	0
0,1	0,975	0,878	1,0	0,861	0,790	0,07	0,774	0,720	0,55	0,709	0,666	0,43
0,2	1,245	0,852	2,0	1,037	0,752	1,42	0,913	0,694	1,09	0,814	0,642	0,86
0,3	1,650	0,766	3,0	1,343	0,700	2,15	1,196	0,654	1,65	0,999	0,611	1,31
0,4	2,272	0,641	4,06	1,780	0,627	2,87	1,491	0,606	2,21	1,262	0,570	1,74
0,5	3,330	0,518	5,03	2,451	0,532	3,83	1,929	0,533	2,84	1,621	0,521	2,20
0,6	5,241	0,347	8,34	3,449	0,428	5,02	2,601	0,455	3,57	2,096	0,461	2,73
0,7	∞	0	∞	5,481	0,293	7,40	3,610	0,362	4,64	2,752	0,394	3,38
0,8				∞	0	∞	5,658	0,252	6,77	3,784	0,316	4,32
0,9							∞		∞	5,806	0,216	6,25
1,0										∞	0	∞

V
4
1

1
9
4
2

XUM

kleiner ε bestätigt worden. Wir haben in der Zahlentafel und in der Abb. 4 den Verlauf der Beiwerte $(c_m)_{22}$ und $(c_m)_{21}$ für verschiedene Werte von κ (0,2—1,0) in Abhängigkeit von der Exzentrizität zahlenmäßig und graphisch wiedergegeben.

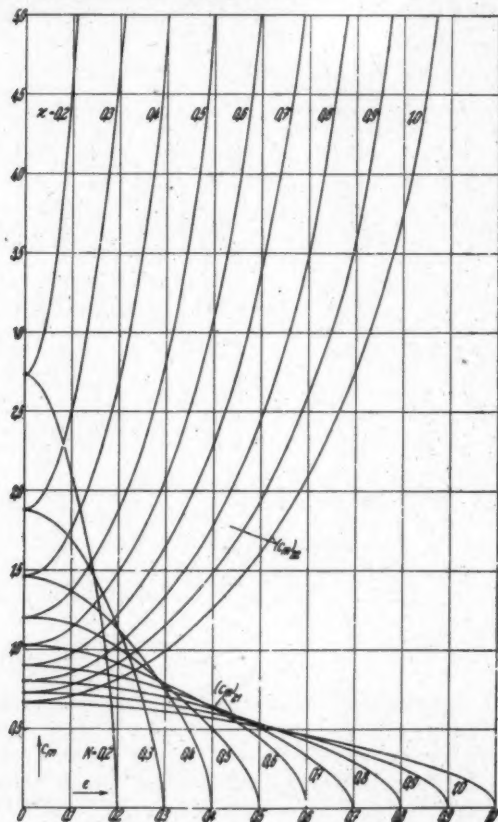


Abb. 4

Die Kurven $(c_m)_{22}$, $(c_m)_{21}$ beginnen mit horizontaler Tangente. $(c_m)_{22}$ haben $\varepsilon = \kappa$ als Asymptoten, $(c_m)_{21}$ verlaufen nach Art von schwach eingedrückten Ellipsen und schneiden die ε -Achse rechtwinklig, wie man aus dem Näherungswert an der Grenze $\varepsilon \rightarrow \kappa$

$$(50) \quad [(c_m)_{21}]_{\varepsilon \rightarrow \kappa} = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{\kappa^2 - \varepsilon^2}}{\kappa^2 (\kappa + 1)}$$

sofort erkennt. Zum Vergleich sind ferner für ein Radienverhältnis ($\lambda = 1,8$) in Abb. 5 sämtliche gleichreduzierten Beiwerte dargestellt, d. h. außer $(c_m)_{22}$ und $(c_m)_{21} = (c_m)_{12}$ noch die Werte $(c_m)_{11}$. Man sieht, daß $(c_m)_{11}$ mit wachsendem ε langsamer ansteigt als $(c_m)_{22}$. Schließlich haben wir noch in Abb. 6 die Abhängigkeit der

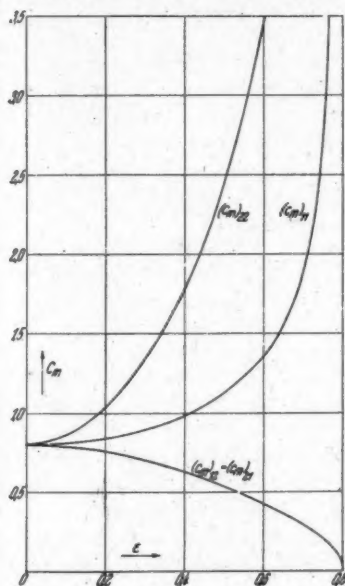


Abb. 5

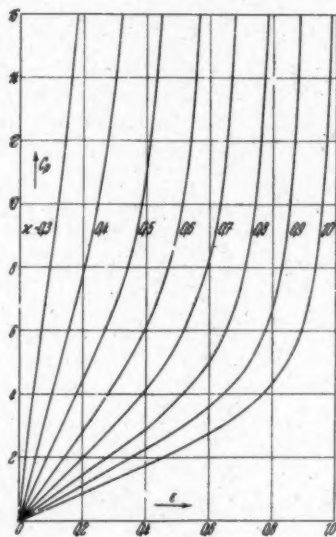


Abb. 6

Kräfte bzw. ihrer Beiwerte von der Exzentrizität wiedergegeben. Die Kräfte wachsen mit kleiner Exzentrizität fast genau linear mit ε und gehen dann asymptotisch für $\varepsilon \rightarrow \pi$ ins Unendliche. Das Moment des in den Mittelpunkten von K_1 und K_2 angreifenden Kräftepaars P_{12} und P_{21} ist gleich der Differenz der Momente M_{22} und M_{11} .

In Analogie zum Zapfenfall kann man ferner z. B. den Quotienten

$$f_{22} = \frac{M_{22}}{P_{22} \cdot r_2} = \frac{(c_m)_{22}}{\lambda (c_p)_{22}}$$

als Reibungszahl einführen. Die Reibungszahl wird für $\varepsilon = 0$ unendlich groß und nimmt für $\varepsilon = \pi$ den Grenzwert

$$(f_{22})_{\varepsilon \rightarrow \pi} = \frac{\pi}{\pi + 1} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

an. Dazwischen liegt ein Minimum, so daß zu jedem Radienverhältnis eine bestimmte Exzentrizität gehört, die einen kleinsten Wert der Reibungszahl liefert (Abb. 7). Die Neigung der f -Kurve im Grenzpunkt

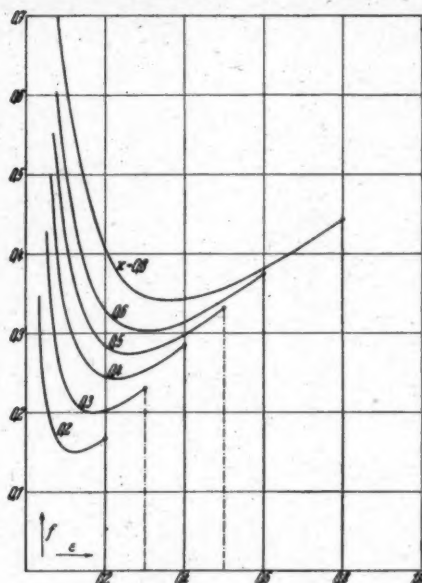


Abb. 7

gegen die Halbmesser des Zylinder. Da in diesem Falle die Näherungsgleichungen

$$\sin \alpha \sim \frac{\sqrt{x^2 - e^2}}{e},$$

$$(\alpha - \beta) \operatorname{Ctg}(\alpha - \beta) \sim 1 + \frac{1}{3} \frac{e^2}{(x+1)^2} \quad \sin^3 \alpha \sim 1 + \frac{1}{3} (x^2 - e^2)$$

gelten, so wird der Zähler von $(c_m)_{22}$

$$(x+1)[(\alpha - \beta) \operatorname{Ctg}(\alpha - \beta) - 1 + e^2] = (x+1) \left[\frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{3} e^2 + e^2 \right] \\ = \frac{x+1}{3} (x^2 + 2e^2)$$

und der Nenner

$$e \sin \alpha \left[\frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{(x^2 - e^2)}{(x+1)^2} + \dots \right) - 2 \right] \\ \sim \frac{\sqrt{x^2 - e^2}}{1+x} \left\{ (x^2 + 2x + 2) \left[1 - \frac{1}{6} (x^2 - e^2) \right] - 2(x+1) \right\} \\ \sim \frac{\sqrt{x^2 - e^2}}{3(1+x)} (2x^2 + e^2).$$

ergibt sich bei Benutzung der früheren Grenzwerte und

$$\left(\sin \alpha \frac{d \sin \alpha}{d e} \right)_{e=x} = - \frac{1}{\lambda - 1}$$

zu

$$\left(\frac{d f_m}{d e} \right)_{e \rightarrow x} = \frac{\lambda - \frac{2}{3}}{\lambda_2}.$$

Das Maximum der Neigung entspricht also dem Radienverhältnis $\lambda = \frac{4}{3}$.

6. Betrachtung zweier für die Anwendungen wichtiger Grenzfälle

a) Wir setzen zunächst voraus, daß die mittlere Breite des Ringraumes und die Exzentrizitätszahl, d. h. die Größen x und e klein seien

W.
Ent
erh

(51)

Die
über
der

geg
so

bei

(52)

Fer

(53)

Dah

Der

höb

N =

Als

(54)

2. S
(Sto
S. 10

Entsprechend lassen sich die übrigen Grenzwerte bestimmen. Wir erhalten dann z. B.

$$(51) \quad \begin{cases} (c_m)_{23} = \frac{x^3 + 2\epsilon^3}{\sqrt{x^3 - \epsilon^3(2x^3 + \epsilon^3)}}; & (c_m)_{21} = \frac{\sqrt{x^3 - \epsilon^3}}{2x^3 + \epsilon^3}; \\ c_p = \frac{3\epsilon}{\sqrt{x^3 - \epsilon^3(\epsilon^3 + 2x^3)}}. \end{cases}$$

Die entsprechenden Werte von $(c_m)_{11}$ und $(c_p)_{11}$ stimmen übrigens überein mit den von Sommerfeld gefundenen Ausdrücken im Falle der Drehung eines Zapfens¹⁾.

b) Wenn wir weiter annehmen, daß die Exzentrizität ϵ klein ist gegen die Breite des Ringraumes und die Halbmesser der Zylinder, so erhalten wir aus der Gleichung

$$\text{Cof}(\alpha - \beta) = \frac{\lambda^3 + 1 - \epsilon^2}{2\lambda}$$

bei kleinem ϵ

$$(52) \quad \alpha - \beta = \text{ArCof} \frac{\lambda^3 + 1 - \epsilon^2}{2\lambda} = \text{ArCof} \frac{\lambda^3 + 1}{2\lambda} - \frac{\epsilon^2}{\lambda^3 - 1} + \dots$$

Ferner ist

$$(53) \quad \begin{cases} \epsilon \sin \alpha = \frac{\lambda^3 - 1}{2} \left(1 - \frac{\lambda^3 + 1}{(\lambda^3 - 1)^2} \epsilon^2 + \dots \right); \\ \sin(\alpha - \beta) = \frac{\epsilon}{\lambda} \sin \alpha; \quad \text{Ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\lambda^3 + 1}{\lambda^3 - 1} + \frac{4\lambda^3}{(\lambda^3 - 1)^2} \epsilon^2 + \dots \end{cases}$$

Daher erhält man für den Zähler des Ausdruckes $(c_m)_{23}$

$$\frac{1}{\lambda} Z = (\alpha - \beta) \text{Ctg}(\alpha - \beta) - 1 + \epsilon^2 = \frac{\lambda^3 + 1}{\lambda^3 - 1} \text{ArCof} \frac{\lambda^3 + 1}{2\lambda} - 1 + \left[\frac{4\lambda^3}{(\lambda^3 - 1)^2} \text{ArCof} \frac{\lambda^3 + 1}{2\lambda} + 1 - \frac{\lambda^3 + 1}{(\lambda^3 - 1)^2} \right] \epsilon^2.$$

Der Nenner wird, da sich die Glieder mit ϵ^2 herausheben, bis auf höhere Potenzen von ϵ^2

$$N = (\alpha - \beta)(\lambda^3 + 1) - 2\epsilon \sin \alpha = (\lambda^3 - 1) \left[\frac{\lambda^3 + 1}{\lambda^3 - 1} \text{ArCof} \frac{\lambda^3 + 1}{2\lambda} - 1 \right].$$

Also kommt

$$(54) \quad (c_m)_{23} = \frac{\lambda}{\lambda^3 - 1} \left\{ 1 + \frac{1 - \frac{\lambda^3 + 1}{(\lambda^3 - 1)^2} + \frac{4\lambda^3}{(\lambda^3 - 1)^2} \text{ArCof} \frac{\lambda^3 + 1}{2\lambda}}{\frac{\lambda^3 + 1}{\lambda^3 - 1} \text{ArCof} \frac{\lambda^3 + 1}{2\lambda} - 1} \cdot \epsilon^2 + \dots \right\}.$$

1) A. Sommerfeld, Z. f. Math. u. Physik 50. S. 97. 1904; Z. f. techn. Phys. 2. S. 58. 1921; Ch. Hanocq, Proc. Third. Intern. Congr. of Appl. Mechanics (Stockholm 1930), I, S. 298; M. D. Hersey, Trans. Amer. Soc. Mech. Eng. 37. S. 167. 1915; J. Am. Sc. Naval Eng. 35. S. 648. 1923.

Ebenso erhält man für $(c_{\infty})_{21}$

$$(55) \quad (c_{\infty})_{21} = \frac{1}{\lambda^2 - 1} \left\{ 1 - \frac{\lambda^2 + 1}{(\lambda^2 + 1)^2} - \frac{4\lambda^2}{(\lambda^2 - 1)^2} \operatorname{ArCoj} \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda} \cdot \varepsilon^2 + \dots \right\}.$$

Nun ergibt sich aber aus der Reihenentwicklung für $\alpha - \beta$

$$\frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} > \operatorname{ArCoj} \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda} > \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}.$$

Der Nenner ist also jedenfalls immer positiv, da $\lambda > 1$. Da aber $\lambda^2 + 1 > 2\lambda$ ist, so folgt

$$\frac{4\lambda^2}{(\lambda^2 - 1)^2} \operatorname{ArCoj} \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda} < \frac{2\lambda}{(\lambda^2 - 1)^2} < \frac{\lambda^2 + 1}{(\lambda^2 - 1)^2}.$$

Da ferner

$$\frac{\lambda^2 + 1}{(\lambda^2 - 1)^2} - \frac{4\lambda^2}{(\lambda^2 - 1)^2} \operatorname{ArCoj} \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda} < 1,$$

so folgt

$$\frac{4\lambda^2}{(\lambda^2 - 1)^2} \operatorname{ArCoj} \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda} + 1 - \frac{\lambda^2 - 1}{(\lambda^2 + 1)^2} > 0.$$

Damit ist also in Übereinstimmung mit den Versuchen von Kellström am Rotations-Viskosimeter streng nachgewiesen, daß, mit dem Werte $\varepsilon = 0$ beginnend, mit wachsendem ε der Momentenbeiwert $(c_{\infty})_{22}$ wächst, während $(c_{\infty})_{21}$ abnimmt. Es wäre begrüßenswert, wenn auch die übrigen Ergebnisse für beliebige Radienverhältnisse und Exzentrizitäten durch genauere Versuche nachgeprüft werden würden. Andererseits dürfte es einen Gewinn für die Viskositätsmessung bedeuten — die Überwindung einiger technischer Schwierigkeiten voraussetzt —, wenn man Rotations-Viskosimeter mit auswechselbar exzentrischer Anordnung verwenden und damit die Möglichkeit einer mehrfachen Überprüfung der Messung erhalten würde.

Ein theoretisch wichtiges Problem ist ferner die Aufstellung einer Näherungslösung für die unverkürzte hydrodynamische Differentialgleichung (7), in der also auch die Trägheitsglieder Berücksichtigung finden, die, wie es scheint, hauptsächlich verantwortlich zu machen sind für das Auftreten der anderen, bisher nicht berücksichtigten Kraftkomponenten in Richtung der Zentralen beider Kreise. Ich hoffe, in einer ergänzenden Betrachtung auf einige mit diesem Problem zusammenhängenden Fragen zurückzukommen.

München, Institut für theoretische Physik und angewandte Mechanik der Universität.

(Eingegangen 24. Januar 1942)

**Messungen der Viskosität kristalliner Flüssigkeiten
nach der Helmholtzschen Methode**

Von G. Becherer und W. Kast

(Mit 2 Abbildungen)

I. Einleitung

Als die Viskositäten kristalliner Flüssigkeiten von Schenck und Eichwald¹⁾ erstmalig, und zwar mit einem Kapillarviskosimeter, gemessen wurden, erschienen die schon äußerlich wahrnehmbaren und von Lehmann seiner Einteilung in flüssige und fließende Kristalle zugrunde gelegten Viskositätsunterschiede in neuer Beleuchtung. Die erste Gruppe mit dem *pp'*-Azoxyphenoldimethyläther (*p*-Azoxyanisol) als bekanntestem Vertreter fällt nicht nur durch kleine Viskositäten von der Größenordnung des Wassers bei 0° C auf, sondern auch dadurch, daß die Viskositäten der kristallinenflüssigen Phase kleiner sind als die der anschließenden isotropen Phase. Im Gegensatz dazu steht die zweite Gruppe mit dem *p*-Azoxybenzoesäureäthylester, bei der die Viskositäten der anisotropen Phase vielmals größer sind als die der isotropen und Werte vom 8—10 fachen Betrage des Wassers erreichen. Übrigens kennzeichnete Vorländer²⁾ in seinen zahlreichen Arbeiten über kristallinflüssige Verbindungen diese beiden Gruppen nach ihrem Aussehen unter dem Polarisationsmikroskop als schlierige und stäbchenförmige flüssige Kristalle, bevorzugte aber später die mit Anklang an die beiden genannten Hauptvertreter geprägten Bezeichnungen *pl*- und *bz*-Phasen, während M. und G. Friedel³⁾ in einer ausführlichen Arbeit über die molekulare Struktur dieser dem Auge trübe erscheinenden Schmelzen die Begriffe der nematischen und smektischen Mesophasen einführten.

In direktem Zusammenhang mit der großen Verschiedenheit der Viskositäten der *pl*- und *bz*-Phasen steht nun ein weiterer, für die physikalischen Untersuchungen dieser Zustände wichtiger

1) R. Schenck, Kristalline Flüssigkeiten, Leipzig 1906.

2) D. Vorländer, Kristallinisch-flüssige Substanzen, Stuttgart 1908; Chemische Kristallographie der Flüssigkeiten, Leipzig 1924.

3) M. u. G. Friedel, Ann. de phys. (9) 18. S. 274. 1922.

V
4
1

1
9
4
2

XUM

Unterschied. Die *pl*-Phasen nämlich werden durch nicht einmal starke magnetische und elektrische Felder, ja schon durch ein geringes Temperaturgefälle in der Flüssigkeit weitgehend orientiert, so daß ihre Trübung verschwindet und bei konoskopischer Beobachtung die typischen Achsenbilder einachsiger Kristalle auftreten. Weiter wird dabei der im trüben Zustand ringsherum gleichmäßig starke Interferenzring des Röntgenbildes nach Art eines Faserdiagrammes in zwei Sicheln aufgespaltet. Auch treten in einem Kondensator bei solchen Orientierungen Kapazitätsänderungen auf, die den Vorgang quantitativ zu verfolgen gestatten. Alle diese Effekte fehlen in den *bz*-Phasen, offenbar weil ihre große Zähigkeit diese Orientierungen verhindert.

Die nähere Betrachtung des molekularen Aufbaues der *pl*-Phasen legt nun den Gedanken nahe, daß die im Kapillarrisikometer beobachteten besonders kleinen Viskositäten nicht den ungeordneten trüben Schmelzen zukommen, sondern vielmehr erst infolge der Orientierung der Schmelzen durch das Strömungsgefälle in der Kapillare zustande kommen. Nach den Untersuchungen Vorländers nämlich sind alle Verbindungen, die kristallinflüssige Phasen besitzen, durch einen ausgesprochen langgestreckten Bau ihrer Moleküle gekennzeichnet. Das führt aber, wie schon Vorländer¹⁾ und Bose²⁾ erkannten, dazu, daß ihre Moleküle in Bereichen von mindestens den linearen Dimensionen der Lichtwellenlängen parallel angeordnet sind, wobei sie, wie M. und G. Friedel betonen, soweit es sich um *pl*-Phasen handelt, in der Richtung ihrer Längsachsen beweglich, ja sogar besonders leicht verschieblich sind. Diese bevorzugte Beweglichkeit in Richtung der Molekülachse ist sogar für den kristallinfesten Zustand nachgewiesen. Denn Bernal³⁾ beobachtete bei seinen Röntgenaufnahmen von Kristallen des *p*-Azoxyanisols, daß die Kristallflächen, auf denen die Moleküle senkrecht stehen, auffallend schlecht ausgebildet sind. Nach diesen Vorstellungen kommt die Trübung dieser Schmelzen dadurch zustande, daß die einzelnen Gruppen oder Schwärme paralleler Moleküle regellos durcheinander liegen, und verschwindet, wenn diese durch äußere Kräfte einheitlich ausgerichtet werden.

Man kann nach diesen Vorstellungen nun eine wesentlich herabgesetzte Zähigkeit erwarten, wenn bei der Strömung durch die Kapillare alle Moleküle sich parallel zur Strömungsrichtung

1) D. Vorländer, Chemische Kristallographie der Flüssigkeiten, Leipzig 1924; Kristallinisch-flüssige Substanzen, Stuttgart 1908.

2) E. Bose, Phys. Ztschr. 10. S. 230. 1909.

3) J. D. Bernal, Farad. Trans. 29. S. 1032. 1933.

einstellen. Für diese Einstellung wurden in neuerer Zeit von Zwetkoff und Michailoff¹⁾ auch der unmittelbare Beweis erbracht. Er konnte nämlich zeigen, daß ein senkrecht zur Strömungsrichtung angelegtes Magnetfeld, das die Molekülachsen erfahrungsgemäß parallel zu seinen Kraftlinien, in diesem Falle also senkrecht zur Strömungsrichtung stellt, die Durchflußzeit durch die Kapillare um ein Vielfaches heraufsetzt. Dabei ergab sich zugleich, daß schon außerordentlich kleine Strömungsgefälle eine wesentliche Orientierung hervorrufen. Zum anderen konnten Marinin und Zwetkoff²⁾ auch die Kapazitätsänderung nachweisen, die gegenüber dem Ruhezustand auftritt, wenn die Flüssigkeit durch eine als Kondensator ausgebildete rechteckige Kapillare strömt, und diese liegt ebenfalls in dem Sinne, daß die Moleküle der Strömungsrichtung parallel stehen.

Diese Orientierung ist an Hand der den Molekülgruppen nach den obigen Betrachtungen zukommenden Viskositätsanisotropie leicht zu verstehen; denn wenn auf der einen Seite einer solchen Gruppe paralleler Moleküle in Richtung ihrer Achsen eine größere Komponente der Strömungsgeschwindigkeit vorliegt als auf der anderen, so muß auf die ganze Gruppe ein Drehmoment ausgeübt werden, das die Molekülachsen in die Strömungsrichtung dreht. Diese Viskositätsanisotropie muß dann besonders zur Geltung kommen, wenn die Molekülachsen einmal parallel, das andere Mal senkrecht zu den mit verschiedener Geschwindigkeit aneinander vorbeigleitenden Flüssigkeitsschichten stehen. Den Nachweis dafür hat Miesowicz³⁾ erbracht, indem er eine Glasplatte parallel ihrer Fläche in einem Gefäß mit kristallinflüssigem *p*-Azoxyanisol schwingen ließ und den Molekülgruppen durch ein angelegtes Magnetfeld bestimmte Richtungen aufzwang. Er fand ohne Magnetfeld eine bestimmte Dämpfung, die stark vergrößert wurde und der 3—4fachen Viskosität entsprach, wenn die Molekülachsen durch das Magnetfeld senkrecht zu der Glasplatte gestellt wurden.

Die *bz*-Phasen zeigen übrigens auch eine Viskositätsanisotropie, aber von ganz anderer Art. Man kann bei ihnen nämlich auf Glimmer als Unterlage sogenannte Stufentropfen beobachten, deren einzelne Schichten sich parallel zur Unterlage außerordentlich leicht verschieben lassen. Da nun nach Röntgenaufnahmen die Stufenhöhe

1) W. N. Zwetkoff u. G. M. Michailoff, *Acta Physicochim. URSS.* 8. S. 69. 1938; G. M. Michailoff u. W. N. Zwetkoff, *Acta Physicochim. URSS.* 10. S. 415 u. 775. 1939.

2) W. Marinin u. W. N. Zwetkoff, *Acta Physicochim. URSS.* 11. S. 837. 1939.

3) M. Miesowicz, *Nature* 136. S. 261. 1935.

genau mit der Moleküllänge übereinstimmt, muß man annehmen, daß die Schichten aus parallel geordneten und dazu noch mit ihren Enden ausgerichteten, also in ihrer Längsrichtung nicht mehr verschieblichen Molekülen bestehen. Die *bz*-Phasen haben also eine höhere molekulare Ordnung als die *pl*-Phasen und treten dementsprechend auch bei ein und derselben Substanz stets bei tieferen Temperaturen auf als die *pl*-Phasen.

Betrachtet man nun den Temperaturverlauf der Viskositäten der kristallinflüssigen *pl*-Phasen und der anschließenden amorphen Schmelzen, so erkennt man, daß dieser durch zwei mit wachsender Temperatur im allgemeinen abfallende Kurven schematisiert werden kann, von denen die obere dem isotropen, die untere dem kristallinflüssigen Zustand entspricht. Doch tritt am Klärpunkt insofern eine Komplikation auf, als die Viskosität hier nicht einfach von der unteren auf die obere Gerade hinaufspringt. Ihre Werte weichen vielmehr, nach den Messungen von Eichwald¹⁾, bereits einige Grade vor dem Klärpunkt nach oben ab und ergeben eine schnell aufbiegende, am Klärpunkt selbst nahezu senkrecht ansteigende Kurve. Dieses Verhalten zeigt eine in diesem Gebiet zunehmende Störung der Parallelordnung der Moleküle zur Strömungsrichtung an, entsprechend der in diesem Bereich aus Messungen der dielektrischen, diamagnetischen und optischen Anisotropie bekannten Abnahme des Ordnungsgrades der Moleküle der Schwärme. Die Messungen mit einem Kapillarviskosimeter liefern also die kleine, den mit ihren Längsachsen parallel aneinander vorbeigleitenden Molekülen entsprechende Viskosität nur für Temperaturen in genügender Entfernung von dem Klärpunkt, während in seiner Nähe größere, einem weniger einfachen Strömungszustand entsprechende Werte gefunden werden.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit war es nun, Viskositätsmessungen mit einer Methode auszuführen, bei der nicht erst die Strömung sich einen einfachen Ordnungszustand schafft. Dafür erschien die Helmholtzsche Methode²⁾ geeignet, bei der die Viskosität aus der Dämpfung einer im Vakuum schwingenden und mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllten Glaskugel bestimmt wird. Hierbei wird die äußerste kugelschalenförmige Flüssigkeitsschicht von dem Glase mitgeführt, während die nächsten infolge der inneren Reibung der Flüssigkeit mit abnehmenden Amplituden

1) Vgl. R. Schenck, Kristalline Flüssigkeiten, Leipzig 1905.

2) H. v. Helmholtz u. G. Piotrowski, Sitzber. Akad. d. Univ. Wien 40. S. 607. 1890.

und zunehmenden Phasenverschiebungen folgen, wodurch der in der Dämpfung zum Ausdruck kommende Energieverlust zustande kommt. Doch klingt diese Mitbewegung der Flüssigkeit nach innen sehr schnell ab, so daß die Reibungsvorgänge auf die Randschichten beschränkt bleiben, in denen bei der anisotropen Flüssigkeit eine völlige Ordnung der Moleküle parallel zur Glaswand besteht. Wenn auch die Azimute der Molekülgruppen in diesen Kugelschalen noch willkürlich verteilt sind, so liegt doch insofern ein einfacher und vor allem stabiler Ordnungszustand vor, als sämtliche Molekülachsen senkrecht zu dem radialen Geschwindigkeitsgefälle stehen.

II. Die Helmholtzsche Methode

So einfach die Methode der Viskositätsbestimmung aus der Dämpfung der Drehschwingung einer mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllten Kugel im Prinzip ist, so kompliziert gestaltet sich die Ermittlung der Viskosität aus den Meßgrößen. Andrade¹⁾, der diese Methode in neuerer Zeit wieder aufgegriffen hat, hat den Weg jedoch durch eine Anzahl zulässiger Vereinfachungen einfacher gestalten können. Wir folgen hier seiner Auswertung, wollen aber vor allem einen Überblick über die in seiner Darstellung zurücktretenden physikalischen Vorgänge geben.

1. Gemessen wird die Drehschwingung einer Glaskugel mit angeblasener Kapillare, die mit der Flüssigkeit gefüllt ist. Das obere Ende der Kapillare ist zentrisch in einem an einer bifilaren Aufhängung hängenden Trägheitssystem befestigt, das zur Herstellung genügend langsamer Schwingungen dient. Maßgebend für die Schwingungsdauer sind im ganzen das Trägheitsmoment J , das Direktionsmoment f und ein Reibungsfaktor L , der sowohl die innere Dämpfung durch die Flüssigkeitsreibung P als auch die äußere durch die Luftreibung P' enthält. Durch Evakuieren des Gefäßes, in dem die Kugel schwingt, wird P' praktisch vermieden und die Rechnung vereinfacht. Die Schwingungsgleichung des Systems

$$(1) \quad J \frac{d^2 \Theta}{dt^2} + L \frac{d\Theta}{dt} + f \cdot \Theta = 0$$

wird durch den Ansatz für die Winkelgeschwindigkeit der Kugel (Radius R)

$$(2) \quad \omega_R = \omega_{0R} \cdot e^{\alpha t}$$

1) E. N. da C. Andrade u. Y. S. Chiong, Proc. Physical Soc. 48, S. 247. 1936.

V
4
11
9
4
2

in üblicher Weise in eine quadratische Gleichung für α verwandelt und ergibt die komplexe Lösung

$$(3) \quad \alpha = -\beta + i\gamma.$$

Es ergibt sich also eine gedämpfte Schwingung mit den Konstanten

$$(3a) \quad \beta = \frac{\delta}{T} \quad \delta \text{ log. Dekrement,}$$

$$(3b) \quad \gamma = \frac{2\pi}{T} \quad T \text{ Schwingungsdauer.}$$

2. In der Kugel geht dabei folgendes vor sich: Die äußerste Flüssigkeitsschicht ($r = R$) macht die Bewegung der Kugel vollständig und ohne Gleiten mit. Eine Gleitung findet erst zwischen den weiteren kugelschaligen Flüssigkeitsschichten statt und hat eine Abnahme der Winkelgeschwindigkeit nach innen und eine Phasenverschiebung zur Folge. Für die Berechnung interessiert nun weniger der zeitliche Verlauf der Schwingung der einzelnen Schichten, als ihre Ausbreitung nach innen. Wir betrachten also von der Funktion

$$(2) \quad \omega(r, t) = \omega_0(r) \cdot e^{at}$$

zunächst nur den zeitunabhängigen Teil, die Amplituden ω_0 . Man kann nun das Problem eben behandeln mit der z -Achse als Rotationsachse und erhält so mit den Geschwindigkeitskomponenten u und v ($w = 0$) die beiden Kraftgleichungen der Hydrodynamik

$$(4a) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \cdot \nabla^2 u, \text{ mit } \nu = \frac{\eta}{\rho} = \text{kinemat. Zähigkeit d. Flüssigkeit,}$$

$$(4b) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \nu \cdot \nabla^2 v$$

und die Kontinuitätsgleichung

$$(4c) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Nach Einführung der Polarkoordinaten ergibt sich daraus

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - b^2 \cdot \varphi(r) = 0 \quad \text{mit } b^2 = \frac{\alpha}{\nu},$$

also die Differentialgleichung einer Rotationswelle, die von außen nach innen in die Kugel fortschreitet. Aus der Beziehung zwischen b und α folgt, daß auch b komplex ist:

$$(5) \quad b = g + ih$$

mit den Argumenten:

$$(5a) \quad g = \sqrt{\frac{\pi}{T \cdot \nu}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{2\pi} + \frac{1}{8} \left(\frac{\delta}{2\pi} \right)^2 \right),$$

$$(5b) \quad h = \sqrt{\frac{\pi}{T \cdot \nu}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\delta}{2\pi} + \frac{1}{8} \left(\frac{\delta}{2\pi} \right)^2 \right),$$

so daß unter Annahme kleiner Dämpfung und der Näherung

$$(5') \quad g = h = \sqrt{\frac{\pi}{T \cdot \nu}}$$

die Konstanten der Rotationswelle folgende Werte erhalten:

$$(5'a) \quad g = \frac{d}{\lambda} \quad d \text{ log. Dekrement} = 2\pi,$$

$$(5'b) \quad h = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \lambda \text{ Wellenlänge} = 2\sqrt{\pi \cdot \nu \cdot T}.$$

Mit $T = 10$ Sek. und $\nu = 0,02$ wird $g = h = 4$ und $\lambda = 1,6$ cm. Auf diese Länge nimmt also die Amplitude der Rotationswelle auf den $e^{2\pi}$ ten Teil oder $1/535$ ab. Der Reibungsvorgang ist daher im wesentlichen auf die äußersten Flüssigkeitsschichten beschränkt, für die r wenig von R verschieden ist. Das berechtigt zu einer wesentlichen Vereinfachung des Ausdruckes für die Winkelgeschwindigkeitsamplituden, der sich als Lösung der Differentialgleichung ergibt:

$$(6) \quad \omega_0(r) = \frac{1}{r^3} [A(b \cdot r - 1)e^{br} + B(b \cdot r + 1)e^{-br}].$$

Denn hier kann nun e^{-br} gegen e^{br} vernachlässigt werden. Am Rande gilt also:

$$(6a) \quad \omega_0(R) = \frac{A}{R^3} (b \cdot R - 1)e^{bR}$$

und innerhalb der zur Reibung beitragenden äußeren Schichten

$$(6b) \quad \omega_0(r) = \omega_0(R) \cdot \frac{R^3}{r^3} \cdot \frac{b \cdot r - 1}{b \cdot R - 1} e^{-b(R-r)}.$$

3. Für die Reibungskraft maßgebend ist nun der Geschwindigkeitsgradient. Dieser nimmt noch schneller als die Geschwindigkeit selbst nach innen ab, so daß hier mit $r = R$ allein gerechnet werden kann:

$$(7) \quad \left(\frac{d(\omega_0(r))}{dr} \right)_{r=R} = \frac{\omega_0(R)}{R} \cdot \frac{b^3 R^3 - 3bR + 3}{bR - 1}.$$

Das Reibungsmoment für eine Kugelzone mit dem Azimut χ und der Breite $d\chi$ ist also

$$(8) \quad dP = \eta \cdot R \cdot \cos \chi \cdot 2\pi R \cos \chi d\chi \cdot R \cos \chi \left(\frac{d\omega_0(r)}{dr} \right)_{r=R} \cdot e^{a\chi}.$$

Rotations- Zonenfläche Geschwindigkeits-
radius gefälle

Die Integration ergibt

$$(8a) \quad P = \frac{8\pi}{3} \eta R^3 \left(bR - 2 + \frac{1}{bR - 1} \right) \frac{d\Theta}{dt} = L \cdot \frac{d\Theta}{dt},$$

V
4
11
9
4
2
XUM

da $\omega_0(R)$ nichts anderes bedeutet als die Winkelgeschwindigkeit der Kugel. Der Reibungsfaktor L ist nun wegen $b = g + ih$ selbst komplex:

$$(9) \quad L = M + iN.$$

Es ergeben sich so durch Zerlegung in Realteil und Imaginärteil die beiden Gleichungen

$$(9a) \quad M = \frac{8\pi}{3} \eta R^3 \left\{ gR - 2 + \frac{gR - 1}{(gR - 1)^2 + h^2 R^2} \right\}$$

und

$$(9b) \quad N = \frac{8\pi}{3} \eta R^4 h \left\{ 1 - \frac{1}{(gR - 1)^2 + h^2 R^2} \right\}.$$

Diese Gl. (9a) und (9b) stellen im Verein mit (5a) und (5b) die Bestimmungsgleichungen für die Viskosität dar.

4. Die Größen M und N können nun andererseits auch aus den Meßgrößen J , T und δ berechnet werden. Indem man nämlich zur Betrachtung der Kugelschwingung zurückkehrt, erhält man aus (1)

$$(10) \quad J\alpha^2 + L\alpha + f = 0$$

unter Berücksichtigung von (3) und (9) durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil

$$(11a) \quad M = \beta \left\{ \frac{f}{\beta^2 + \gamma^2} + J \right\},$$

$$(11b) \quad N = \gamma \left\{ \frac{f}{\beta^2 + \gamma^2} - J \right\}.$$

Unter Einsetzung der Werte für β und γ aus (3a) und (3b) und unter Berücksichtigung, daß für die Schwingungsdauer der leeren Kugel gilt

$$(12) \quad f = \frac{4\pi^2 J}{T^2}$$

wird schließlich

$$(13a) \quad M = \frac{J\delta}{T} \left(\frac{T^2}{T_0^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2} + 1 \right),$$

$$(13b) \quad N = \frac{2\pi J}{T} \left(\frac{T^2}{T_0^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2} - 1 \right),$$

oder unter Vernachlässigung des Einflusses der Dämpfung auf die Schwingungsdauer sowie Heranziehung der Gl. (9a) und (9b)

$$(14a) \quad M = \frac{J\delta}{T} \left(\frac{T^2}{T_0^2} + 1 \right) = \frac{8\pi}{3} \eta R^3 \left(gR - 2 + \frac{gR - 1}{(gR - 1)^2 + h^2 R^2} \right),$$

$$(14b) \quad N = \frac{2\pi J}{T} \left(\frac{T^2}{T_0^2} - 1 \right) = \frac{8\pi}{3} \eta R^4 h \left(1 - \frac{1}{(gR - 1)^2 + h^2 R^2} \right).$$

5. Die Auswertung dieser Ausdrücke zur Berechnung der Viskosität η ist aber noch sehr unbequem, da g und h nach Gl. (5a) und (5b) mit $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ die Viskosität ebenfalls enthalten. Sie gelingt nach Andrade am einfachsten durch das folgende Verfahren der sukzessiven Annäherung:

In erster Näherung wird nach (5) $g = h = \sqrt{\frac{\pi \cdot \rho}{T \cdot \eta}}$ gesetzt. Beachtet man nun, daß der Ausdruck $\frac{1}{(gR-1)^2 + h^2 R^2}$ mit $g = h = 4$ und $R = 2$ gleich $1/113$ wird und vernachlässigt ihn gegen 1, so erhält man aus (13b)

$$(15) \quad N = \frac{2\pi J}{T} \left(\frac{T^2}{T_0^2} - 1 \right) = \frac{8\pi}{3} \eta R^2 \sqrt{\frac{\pi \cdot \rho}{T \cdot \eta}}$$

und

$$(16) \quad \eta_1 = \frac{9}{16\pi} \cdot \frac{J^2}{R^2 \cdot \rho} \cdot \frac{(T + T_0)^2 (T - T_0)^2}{T \cdot T_0^4}.$$

Dieser Wert fällt zu groß aus, da h zu klein eingesetzt ist. Er ist aber außerdem wegen der sehr kleinen Differenz $(T - T_0)$ außerordentlich ungenau. Es empfiehlt sich also, wenn es möglich ist, diese Näherung nicht durchzuführen, sondern einen vielleicht aus Werten bei anderer Temperatur abgeschätzten Viskositätswert für die zweite Näherung zu benutzen.

In zweiter Näherung wird in die Gleichung für M der volle Wert $g = \sqrt{\frac{\pi \cdot \rho}{T \cdot \eta_1}} \cdot a$ eingesetzt mit

$$(17) \quad a = 1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{2\pi} + \frac{1}{8} \left(\frac{\delta}{2\pi} \right)^2.$$

Nur für den Bruch $\frac{g \cdot R - 1}{(gR-1)^2 + h^2 R^2} = q \sim \frac{7}{113} = 0,06$, der nur eine

kleine Korrektur darstellt, wird die Näherung $g = h = \sqrt{\frac{\pi \cdot \rho}{T \cdot \eta_1}}$ wieder benutzt. Man erhält so eine quadratische Gleichung für $\sqrt{\eta}$ und schließlich

$$(18) \quad \eta_{11} = \frac{a^2 \cdot R^2 \cdot \pi \cdot \rho}{4 \cdot q'^2 \cdot T} [1 - \sqrt{1 - \mu}]^2 \quad \text{mit} \quad q' = 2 - \frac{gR-1}{(gR-1)^2 + h^2 R^2}$$

$$\text{und} \quad \mu = \frac{3q'J\delta}{2\pi^2 a^2 R^2 \rho} \left(\frac{T^2}{T_0^2} + 1 \right).$$

Für eine dritte Näherung berechnet man dann q' mit Hilfe von η_{11} und führt die Rechnung nochmals durch. So kann man beliebig fortfahren, doch unterscheidet sich die dritte Näherung im allgemeinen praktisch schon nicht mehr von der zweiten.

6. Diese Berechnungsmethode gibt nun zugleich eine Einschränkung für die Wahl der Konstanten R , J und f der Apparatur: Die Auswertung erfordert nämlich:

$$(19) \quad \mu = \frac{3q'J\delta}{2\pi^2 a^3 R^3 \varrho} \left(\frac{T^2}{T_0^2} + 1 \right) < 1.$$

Für eine Überschlagsrechnung setzen wir $q' = 2 - q = 2$, $\frac{T}{T_0} = 1$, $a = 1$, $\varrho = 1$, $\pi^2 = 10$ und erhalten dann die Bedingung

$$(19a) \quad J < \frac{5}{3} \frac{R^3}{\delta}.$$

Nun ist, wie sich zeigen wird, δ bei einem Kugelradius von 1,75 cm etwa 0,05, und ändert sich nach (8a) proportional mit R^3 . Ferner wird durch J und T auch die Direktionskraft f bestimmt. Auch sie wird also durch diese Bedingung eingeschränkt, wenn T etwa gleich 10 Sek. sein soll. So ergeben sich die folgenden oberen Grenzen für J und f bei verschiedenen Radien der Kugel:

Tabelle 1

R	2,00	1,75	1,50	1,25	1,00 cm
J	650	500	400	250	150 g·cm ³
f	260	200	160	100	60 dyn·cm

Diese Bedingungen sind offenbar bei kleinem Kugelradius kaum zu erfüllen. Andererseits ist ein solcher aber bei den Untersuchungen kristallinflüssiger Verbindungen zur Herabsetzung der erforderlichen Substanzmenge erwünscht.

Einer wesentlichen Verkleinerung des Kugelradius gegenüber der Apparatur von Andrade ($R = 2,5$ cm) ist außerdem aber dadurch eine Grenze gesetzt, daß dabei das innere Reibungsmoment L als Folge der Flüssigkeitsreibung stärker abnimmt als die äußere Luftreibung L' , so daß die letztere selbst in einem Vakuum von 10^{-5} mm Hg nicht mehr vernachlässigt werden kann. Die Dämpfungen sind zudem auch vom Trägheitsmoment und der Direktionskraft abhängig:

$$\delta = \frac{\pi \cdot L}{\sqrt{J \cdot f}} \quad \text{und} \quad \delta' = \frac{\pi \cdot L'}{\sqrt{J \cdot f}}.$$

Man muß also, um δ' klein zu halten, L' klein und zugleich J und f möglichst groß machen, während andererseits δ nur durch großes L , also großen Kugelradius, das erforderliche Übergewicht bekommen kann.

Vorversuche ergaben in einem Vakuum von 10^{-5} mm Hg bei Verwendung einer binären Aufhängung aus 0,10 mm Stahldraht mit der kleinen Direktionskraft von nur 130 dyn·cm selbst bei einem

nach der Tab. 1 viel zu großem Trägheitsmoment (über 800 g·cm²), durch das die Schwingungsdauer auf über 15 Sek. erhöht wurde, für Kugeln mit 1,1 und 1,5 cm Radius relativ viel zu große äußere Dämpfungen (Tab. 2). Mit einer stärkeren Aufhängung (0,15 mm Stahldraht, $f = 250$ dyn·cm) und einer Kugel von 1,75 cm Radius konnte aber das Trägheitsmoment etwa gemäß Tab. 1 erniedrigt werden, ohne die äußere Dämpfung zu erhöhen, und zugleich auch ein erträgliches Verhältnis der äußeren und inneren Dämpfung erreicht werden. Die Kugeln waren bei diesen Versuchen mit Wasser gefüllt.

Tabelle 2

Aufhängung	R	f	J	T	δ	δ'	δ'/δ
0,10 mm Stahldraht	1,104	130	810	15,5	0,0118	0,00396	0,33
0,10 mm "	1,509	130	820	15,6	0,0378	0,00318	0,084
0,15 mm "	1,706	250	480	8,7	0,0631	0,00260	0,041
0,15 mm "	1,747	250	470	8,6	0,0700	0,00276	0,040

III. Apparaturbeschreibung

Aufbau

Die Apparatur ist im wesentlichen der von Andrade nachgebildet. Sie besteht aus dem bifilar aufgehängten schwingenden System in einem vakuumdichten Mantel. Das System setzt sich von oben nach unten aus folgenden Einzelteilen zusammen: Dem Torsionsknopf Tk zum Ingangsetzen der Torsionschwingungen, der bifilaren Aufhängung A , dem Trägheitssystem Tr mit veränderlichem Trägheitsmoment, das zugleich den Spiegel zur Beobachtung der Schwingungen trägt, sowie einer Glaskapillare Kp mit gut zentrisch angeblasener Kugel K .

Die Aufhängung A besteht aus zwei 75 cm langen Stahldrähten von 0,15 mm Durchmesser, die oben durch zwei Bohrungen im Torsionskopf und unten durch den Haken des eingehängten Trägheitssystems in einem Abstand von 2,5 mm gehalten werden.

Das Trägheitssystem Tr wird aus einem kurzen Stück Rundmessing von 8 mm Durchmesser und 12 mm Länge gebildet, durch das ein 2 mm starker und 10 cm langer Stahlstab als Trägheitsbalken durchgesteckt und mit Nieten befestigt ist. Auf diesem sind zwei kreisförmige Trägheitscheiben Te aus Messing von 1 cm Durchmesser, 0,4 cm Dicke und je 10 g Gewicht verschiebbar zwischen den Abständen 1,2 und 9,6 cm angeordnet. In das Mittelstück sind außerdem zwei gleiche Stahlstäbe von oben und unten zentrisch eingeschraubt. Der obere trägt eine aufgeschraubte Messingkappe mit Haken und Spiegel, der untere in 5 cm Abstand eine Messinghülse H zur Aufnahme der Glaskapillaren. Diese besteht aus einem dreifach geschlitzten Messingrohr mit konischem Außengewinde und Mutter. Auf ihren Ansatz können zur Belastung der aufgehängten Drähte radial geschlitzte Bleischeiben Gw aufgelegt werden, die dem

V
4
11
9
4
2
XUM

System das nötige Gewicht geben, ohne das Trägheitsmoment unzulässig zu erhöhen. Verwendung fanden dazu drei Bleischeiben von je 180 g Gewicht.

Die Glaskugel K und die Kapillare Kp hatten die ungefähren Maße: Kugelradius 1,7 cm, lichter Kapillarradius 0,1 cm, Kapillarlänge 15 cm.

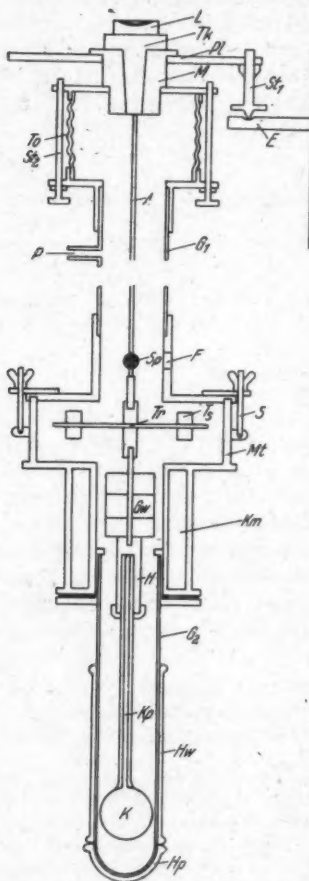


Abb. 1. Apparat

Glasrohres. Die beiden Abschlußplatten sind an drei Stellen durch lange Schrauben St_1 miteinander verbunden, mit deren Hilfe ihre Ebenen gegeneinander geneigt werden, um geringe Krümmungen der Glasrohre auszugleichen und insbesondere das unten, der guten Wärmeübertragung wegen die schwingende

Das vakuumdichte und an seinem unteren Ende heizbare Gehäuse der Apparatur setzt sich zusammen aus der Trägerplatte Pl , einem kurzen Stück Tombakrohr To mit anschließendem oberen Glasrohr G_1 mit Pumpansatz P , weiter einem Metalltopf Mt , in dem das Trägheitssystem schwingt, einem Metallrohr mit Kühlmantel Km und schließlich dem unteren, unten geschlossenen Glasrohr G_2 , das zur Beheizung der in ihm schwingenden Glaskugel und Glaskapillare die Heizwicklungen Hw und Hp trägt.

Die Trägerplatte steht mit drei als Stellschrauben ausgebildeten Füßen St_1 auf drei in der Zimmerwand einzementierten Flächeisen E . Sie trägt in der Mitte einen Metallklotz M , in den der Torsionsknopf Tk mit einem konischen Schliff eingesetzt ist. An dem Torsionsknopf ist unten die bifilare Aufhängung befestigt, oben sitzt auf ihm eine Libelle L , mit der die vertikale Stellung seiner Drehachse kontrolliert wird, damit das System nach seinem Anstoß durch eine ruckartige Drehung des Torsionsknopfes eine reine Drehschwingung ausführt und nicht auch ins Pendeln gerät.

Das anschließende kurze Stück Tombakrohr To ist zwischen zwei Abschlußplatten gefaßt, von denen die obere an dem Metallklotz der Trägerplatte angelötet ist. Die untere trägt einen kurzen zylindrischen Ansatz zur Aufnahme und Einkittung des oberen

Glaskugel mit geringem Spiel umschließende Glasrohr zentrisch zur Schwingungssachse einzustellen.

An das obere Glasrohr G_1 ist eine Glasfeder angeblasen, die die bewegliche Verbindung mit einer Quecksilberdiffusionspumpe darstellt. Das Rohr ist unten in eine Messingmanschette eingekittet, die auf einer großen Metallplatte, dem Deckel des Metalltopfes für das Trägheitssystem, aufsitzt. Die Manschette enthält ein Fenster F für die Beobachtung der Drehung des Spiegels des schwingenden Systems.

Bis hierhin bilden die beschriebenen Bauelemente, Trägerplatte, Tombakrohr, oberes Glasrohr und Deckel des Metalltopfes für das Trägheitssystem den oberen nicht zerlegbaren vakuumdicht gelöteten bzw. gekitteten Teil des Apparaturgehäuses. An dieser Stelle aber ist die Öffnung der Apparatur notwendig, um zu Beginn der Messungen das Gehänge aus Trägheitssystem, Glaskapillare und Glaskugel in die mit dem Torsionsknopf von oben eingeführte Aufhängung einzuhängen und während der Messungen zur Ermittlung des Trägheitsmomentes den Abstand der Trägheitscheiben zu verändern. Um aber nicht mehr als diese eine auseinandernehmbare Dichtungsstelle zu haben, ist auch der untere Teil des Gehäuses mit Mantel und Boden des Metalltopfes, wassergekühltem Ansatzrohr und unterem Glasrohr zu einem nicht wieder zerlegbaren Stück vakuumdicht gelötet und gekittet, das über die Glaskugel hinweggeschoben werden kann. Dazu darf dieser Teil allerdings keine Verengungen enthalten, die kleiner sind als der Durchmesser der Kugel. Trotzdem zeigte sich aber der Wärmeschutz von Trägheitssystem und Aufhängung gegen den geheizten Unterteil des Mantels völlig ausreichend.

Der untere Teil des Apparaturgehäuses endigt oben in Boden und Mantel des Metalltopfes für das Trägheitssystem. Zu ihrer Befestigung und Abdichtung an dem zum oberen Teil gehörigen Deckel besitzt dieser unmittelbar am Rande einen ausgedrehten Ring, in den der Zylindermantel unter Zwischenlegung eines Gummiringes eingesetzt wird. Weiter trägt der Deckel drei überstehende geschlitzte Laschen, in die drei am Zylinder befestigte, um tangential Achen schwenkbare Schraubenbolzen S eingeklappt und durch Schraubenmuttern angezogen werden.

An den Boden des Metalltopfes ist ein doppelwandiges Messingrohr angelötet, das mit fließendem Wasser gekühlt wird, um den Metalltopf und die Kittverbindung mit dem unteren geheizten Glasrohr kalt zu halten.

Das die Apparatur unten abschließende Glasrohr G_2 ist zugeschmolzen und trägt, etwa 5 cm unter der Kittstelle beginnend, zwei mit Asbest und Wasserglas aufge kittete Heizwicklungen H_w auf seinem Mantel und eine unabhängig davon regulierbare Heizplatte H_p an seinem Boden. Zwischen den beiden Mantelheizungen sind zwei vertikale Schlitzte freigelassen zur Beobachtung des Flüssigkeitsstandes der Kapillaren. Zur Erwärmung auf 140°C waren etwa 70 Watt erforderlich.

Konstanten und Meßgrößen

Die Konstanten der Apparatur, die in die Messung eingehen, sind das Trägheitsmoment des Gehänges und der Radius der Glaskugel. Die Meßgrößen sind die Schwingungsdauern des Gehänges mit leerer (T_0) und gefüllter Glaskugel (T) sowie das Dekrement δ der Schwingungen; außerdem muß die Temperatur $t^\circ \text{C}$ der Flüssigkeit in der Kugel ermittelt werden.

Die Schwingungsdauern können durch mehrmalige Messung der Zeit für 50 Schwingungen leicht auf weniger als 0,1%, genau bestimmt werden. Die Dämpfung wird durch Ablesen von 50—100 Umkehrpunkten des Lichtzeigers auf einer mm-Skala ermittelt. Diese Umkehrpunkte ergeben bei logarithmischer Auftragung gegen die Zahl der Schwingungen eine Gerade, deren Neigung das Dekrement mißt. Der hierbei eingehende Fehler beträgt weniger als 0,5%.

Für die Messung des Trägheitsmomentes werden die Schwingungsdauern der gefüllten Kugel bei zwei verschiedenen Stellungen der Trägheitsscheiben aufgenommen. Da nur die äußersten Flüssigkeitsschichten in der Glaskugel mitschwingen, ist die Füllung von kaum wahrnehmbarem Einfluß auf die Schwingungsdauer. T und T_0 fielen bei allen Messungen innerhalb der Fehler gleich aus. Das Trägheitsmoment setzt sich aus einem unveränderlichen Teil J_0 und dem Moment der Trägheitsscheiben ma^2 zusammen. Daraus folgt

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{J_0 + ma_1^2}{J_0 + ma_2^2} \quad \text{oder} \quad J_0 = m \cdot \frac{T_1^2 a_2^2 - T_2^2 a_1^2}{T_1^2 - T_2^2}.$$

Die Messung ergab:

$$\begin{aligned} T_1 &= 8,620 \pm 0,005 \text{ sec} & \text{mit } m &= 19,992 \text{ g}, & a_1 &= 0,600 \pm 0,001 \text{ cm}, \\ T_2 &= 11,600 \pm 0,005 \text{ sec} & & & a_2 &= 4,800 \pm 0,001 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$J_0 = 563 \pm 3 \text{ g/cm}^2$$

und

$$J = 570 \pm 3 \text{ g/cm}^2$$

für den kleinsten Abstand der Trägheitsscheiben.

Das Volumen der Kugel und der Querschnitt der Kapillaren wurde durch Auswägen mit Quecksilber bestimmt. Durch Füllung der Kapillaren bis zu verschiedenen Höhen ergab sich

$$\begin{aligned} \text{der Querschnitt} \quad & \dots \quad r^2 \pi = 0,0410 \pm 0,0004 \text{ cm}^2, \\ \text{der Radius} \quad & \dots \quad r = 0,1142 \pm 0,0006 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Daraus ergab sich weiter das Volumen der Kugel zu 20,79 cm³ mit einem Fehler erst in der nächsten Dezimalen und ihr Radius zu

$$R = 1,706 \pm 0,002 \text{ cm}.$$

IV. Messungen an *p*-Azoxyanisol

Die Messungen wurden für eine Reihe von verschiedenen Temperaturen sowohl in der kristallinflüssigen als auch in der normalflüssigen Phase angestellt. Der am Verschwinden der Trübung deutlich beobachtbare Umwandlungspunkt zwischen beiden flüssigen Phasen bot dabei eine gute Kontrolle für die Gleichmäßigkeit der Temperaturverteilung in der Flüssigkeit. Durch entsprechende Regulierung der Wand- und der Bodenheizung konnte erreicht werden, daß die Umwandlung im ganzen Volumen gleichzeitig stattfand und so die nötige Vorbedingung für die erwünschte starke Annäherung der Meßpunkte an den Klärpunkt erfüllt wurde.

Die Schwingungsdauer war bei allen Temperaturen dieselbe: $T = T_0 = 8,663$ Sek. Von den gemessenen Dämpfungsdekrementen wurde bei allen Messungen das Dekrement der leeren Kugel mit $\delta' = 0,00110$ abgezogen.

Als erste Näherung wurde bei allen Temperaturen derselbe Wert $\eta_1 = 0,0260$ benutzt, der etwa in der Mitte der von Eichwald im gleichen Temperaturgebiet mit einem Kapillarviskosimeter gemessenen Zähigkeitswerte liegt. Dadurch wurde jede Voraussetzung über den Temperaturverlauf vermieden. Im allgemeinen brachte die Berechnung der dritten Näherung gegenüber der zweiten keine Änderung mehr. Daher wurde nur dort, wo ausnahmsweise eine Differenz von mehr als 1 in der dritten Stelle auftrat, noch die vierte Näherung berechnet. Der Meßfehler macht die Viskositätswerte um 2% unsicher.

In der Abb. 2 ist der Temperaturverlauf der Viskosität des *p*-Azoxyanisol in beiden flüssigen Phasen nach diesen Messungen graphisch dargestellt. Dabei ergeben sich gegenüber den mit-eingetragenen Messungen Eichwalds mit einem Kapillarviskosimeter folgende Unterschiede:

1. In beiden Phasen lassen sich die Meßpunkte innerhalb ihrer Fehler durch parallele Gerade verbinden. Der Temperaturkoeffizient der Viskosität ist also in beiden Fällen derselbe.

2. Am Klärpunkt erfolgt ein jäher Sprung der Viskositätswerte von der tiefer gelegenen Geraden für die kristallinflüssige Phase, auf die höhere Gerade für die normalflüssige Phase. Zwischenwerte sind nicht meßbar. Der für die kleinere Viskosität der kristallinen Flüssigkeit maßgebende Ordnungszustand verschwindet also sprunghaft am Klärpunkt.

3. Die Viskositätsmessungen stimmen auch in der normalflüssigen Phase nicht mit denen Eichwalds überein. Die neuen Werte liegen vielmehr bis zu 7% höher. Da hier eine Abweichung

Tabelle 3
Ermittlung der Viskositäten aus den Meßdaten

Kristallinflüssig	ρ g/cm ³	δ	1. Näherung		2. Näherung				3. Näherung				4. Näherung			
			α^*	η_i	g	g'	μ	η_{II}	g	g'	μ	η_{III}	g	g'	μ	η_{IV}
116,1	1,1715	0,0431	0,99312	0,0260	4,028	1,9281	0,856	0,0319	3,639	1,9207	0,853	0,0317	3,651	1,9209	0,853	0,0317
121,0	650	437	320	260	017	280	853	312	666	212	850	311				
121,5	645	428	318	260	017	280	855	315	647	209	852	314				
121,9	640	426	320	260	016	279	852	310	676	214	851	311				
122,6	631	421	328	260	014	278	842	308	749	228	840	307				
122,7	639	423	326	260	014	278	846	303	717	222	844	302				
123,6	618	419	332	260	012	277	839	295	769	210	836	295				
125,8	591	415	338	260	008	277	833	286	822	244	831	285				
127,0	576	414	340	260	005	277	832	284	829	246	831	284				
131,3	535	409	348	260	3,998	276	825	275	887	256	824	275				
133,4	516	404	356	260	995	275	816	265	957	268	816	265				
133,4	516	405	354	260	995	275	818	267	940	274	818	267				
134,3	507	405	354	260	993	275	819	268	935	274	819	268				
135,0	500	403	358	260	992	275	815	264	964	270	815	264				
135,2	494	403	358	260	991	275	816	264	961	268	815	264				

normalflüssig																
135,2	1,1441	0,0424	0,99324	0,0260	3,981	1,9272	0,862	0,0319	3,584	1,9197	0,859	0,0317	3,605	1,9200	0,859	0,0317
135,9	438	424	324	260	981	272	862	320	591	197	859	317	604	199	859	317
139,2	412	419	332	260	976	272	854	308	655	201	851	306	666	212	852	306
141,3	391	416	336	260	973	271	849	301	692	217	847	300				
141,7	387	416	336	260	972	271	850	301	690	216	847	300				
144,7	360	409	348	260	968	270	837	286	730	216	835	285				

der Ergebnisse verschiedener Methoden nicht gut denkbar ist, muß diese Differenz auf Meßfehler zurückgeführt werden. Die Lage der neuen Meßpunkte zueinander ist auf etwa 2% gesichert, ihr absoluter Betrag ist jedoch möglicherweise weniger genau. Auch der mögliche Fehler der Eichwaldschen Messungen ist nicht bekannt.

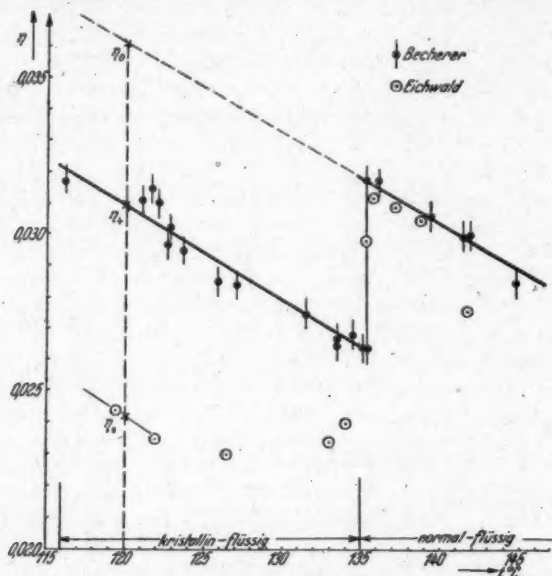


Abb. 2. Viskosität von p-Azoxyanisole

V. Diskussion der Meßergebnisse

Die neuen Messungen können mit den bisher vorliegenden in folgender Weise in Zusammenhang gebracht werden: Bei Flüssigkeiten mit langgestreckten Molekülen sind bei so weitgehender Ordnung der Molekülachsen; wie sie gerade bei den kristallinen Flüssigkeiten leicht erreicht wird, je nach ihrer Stellung zum Geschwindigkeitsgefälle folgende Viskositätswerte zu erwarten:

1. Alle Moleküle stehen senkrecht zum Geschwindigkeitsgefälle. Sie gleiten also in ihrer Längsrichtung mit verschiedenen Geschwindigkeiten aneinander vorbei und übertragen dabei wegen ihrer herabgesetzten Bewegungsmöglichkeit senkrecht zu ihrer Längsrichtung nur wenig Impuls zwischen den Schichten verschiedener Geschwindigkeit. Die Viskosität hat ihren kleinsten Wert η_{\perp} (Abb. 2).

Dieser Fall liegt, wie einleitend ausführlich dargelegt wurde, bei den Messungen mittels Kapillarviskosimeter vor, wenigstens in genügender Entfernung vom Klärpunkt. Mit wachsender Annäherung an den Klärpunkt kann die Strömung jedoch diesen Ordnungszustand immer weniger gut herbeiführen. Die Viskosität steigt daher innerhalb der letzten Temperaturgrade unterhalb des Klärpunktes an.

2. Alle Molekülachsen stehen parallel zum Geschwindigkeitsgefälle. In diesem Falle ergibt die bevorzugte Beweglichkeit der Moleküle in ihrer Längsrichtung eine besonders starke Impulsübertragung. Für diese Ordnung hat die Viskosität daher ihren größten Wert η_{\perp} . Die Differenz $\eta_{\perp} - \eta_{\parallel}$, die durch die verschieden ausgeprägte Translation der Moleküle parallel und senkrecht zu ihrer Längsrichtung zustande kommt, könnte als Viskositätsanisotropie bezeichnet werden.

Eine solche Ordnung wurde bei den Messungen von Miesowicz¹⁾ und Zwetkoff²⁾ mit Hilfe eines senkrecht zur Strömungsrichtung erregten Magnetfeldes verwirklicht. Zugleich ergab sich dabei das Verhältnis der Viskositäten η_{\parallel} und η_{\perp} etwa wie 1:3.

3. Alle Moleküle liegen mit ihren Längsachsen in den mit verschiedener Geschwindigkeit aneinander entlang gleitenden Schichten, haben aber innerhalb dieser Schichten gruppenweise willkürliche Azimute. Die zugehörige Viskosität η_{+} liegt zwischen η_{\parallel} und η_{\perp} , jedoch näher an η_{\parallel} (Abb. 2).

Diese Ordnung liegt, wie oben bereits ausgeführt wurde, bei den Messungen nach der Helmholtzschen Methode vor, da der Reibungsvorgang in der schwingenden Kugel sich auf die äußersten Flüssigkeitsschichten beschränkt. In diesen aber liegen, wie aus den verschiedenartigsten Beobachtungen folgt, die Moleküle mit gruppenweise verschiedenem Azimut parallel zu der Wandfläche. Die Viskositätserhöhung macht gegenüber η_{\parallel} etwa den Faktor 1,4 aus.

4. Die Molekülachsen liegen willkürlich zum Geschwindigkeitsgefälle. Die zugehörige Viskosität η_0 ist größer als $-\eta_{+}$, aber kleiner als η_{\perp} (Abb. 2).

Dieser Fall ist in der klaren Flüssigkeit verwirklicht. Ihre Viskosität η_0 beträgt, bezogen auf dieselbe Temperatur, etwa die Hälfte von η_{\perp} .

1) M. Miesowicz, Nature 136. S. 261. 1935.

2) W. N. Zwetkoff u. G. M. Michailoff, Acta Physicochim. URSS. S. 69. 1938.

Die Viskositätsmessungen entsprechen dieser Reihenfolge vollauf. Für *p*-Azoxyanisol ergeben sich, bei 120° C die Werte:

$$\eta_{\parallel} = 0,0242; \quad \eta_{+} = 0,0310; \quad \eta_{\circ} = 0,0362; \quad \eta_{\perp} \approx 0,08.$$

Dadurch ist erwiesen, daß die Viskositätswerte wenigstens qualitativ sich aus den verschiedenen Ordnungszuständen verstehen lassen.

VI. Zusammenfassung

1. Auf Grund von Überlegungen über den Zusammenhang von Ordnungszustand und Viskosität werden an der kristallinflüssigen und der normalflüssigen Phase des *p*-Azoxyanisols Viskositätsmessungen nach der Helmholtzschen Methode angestellt.

2. Die Konstruktion der Apparatur, die Messungen und ihre Auswertung erfolgten in Anlehnung an die Neuentwicklung der Helmholtzschen Methode durch Andrade.

3. Die Viskositäten lassen sich durch zwei parallele Gerade darstellen, von denen die untere der kristallinflüssigen, die obere der normalflüssigen Phase entspricht. Der Übergang zwischen beiden erfolgt sprunghaft bei der Temperatur des Klärpunktes.

4. Die nach dieser Methode erhaltenen Werte werden zu den auf anderen Wegen gewonnenen Viskositäten durch die Heranziehung des jeweiligen Ordnungszustandes in Beziehung gesetzt.

Z. Z. im Felde und Halle, Institut für experimentelle Physik der Universität, Dezember 1941.

(Eingegangen 21. März 1942)

**Die Intensitätsverhältnisse der K-Serienlinien
bei den Schwerenlementen Re(75) bis Pb(82)**

(Aus dem Institut für Medizinische Physik der Universität Göttingen)

Von Gerhard Voth

(Mit 7 Abbildungen)

Über die Intensitätsverhältnisse der K-Serienlinien liegen eine Reihe von Untersuchungen vor. Sie wurden zusammengestellt von Grothey¹⁾, der im hiesigen Institut selbst Messungen des Intensitätsverhältnisses der Linien $\alpha\alpha'$ und $\beta\gamma$ an 20 Elementen zwischen Co(27) und Te(52) durchführte. Hiervon erwiesen sich die Ausgangsstoffe zweier Elemente [Y(39) und Nb(41)] als verunreinigt, so daß die an ihnen erhaltenen Ergebnisse nicht verwendet werden konnten. Grothey führte seine Untersuchungen nach der von Küstner²⁾ angegebenen und von diesem selbst auf Cu(29) angewandten Absorptionmethode durch; die bereits von Küstner und Arends³⁾ für die L-Serie der Schwerenlemente benutzte Emissionsmethode wurde von Grothey für die K-Serie zur Kontrolle für die Elemente Zn(30) und Sb(51) herangezogen. Ein Vergleich der Ergebnisse anderer Autoren mit denen von Grothey, wie er ihn in seiner Abb. 1 durchführt, läßt erkennen, daß erstens die Ergebnisse der verschiedenen Autoren untereinander geradezu ungeheure Unterschiede aufweisen, und daß zweitens die nach spektralphotographischer Methode erhaltenen Ergebnisse für zahlreiche Elemente, wie sie H. Th. Meyer⁴⁾ durchführte, nicht allein bedeutend stärker streuen als die Einzelwerte Grotheys nach der Absorptionmethode (vgl. seine Abb. 2), sondern auch im Durchschnitt etwa um den Betrag 1 höher liegen als die Grotheyschen Werte für $E_{\alpha\alpha'}/E_{\beta\gamma}$ (vgl. seine Abb. 1). Der Weg Grotheys, möglichst viele Elemente nach der Absorptionmethode zu untersuchen, war deswegen fruchtbringend, weil die von ihm benutzte Methode offenbar zuverlässiger war als die Methoden der anderen Autoren, und weil die Untersuchung an möglichst vielen Elementen erlaubte, trotz der noch vorhandenen, aber verhältnismäßig geringen Streuung der Einzelergebnisse eine nunmehr recht zuverlässige Kurve festzulegen, die das Intensitätsverhältnis $E_{\alpha\alpha'}/E_{\beta\gamma}$ in Abhängigkeit von der Atomnummer Z darstellt. Dabei fand Grothey,

V
4
1

1
9
4
2

XUM

daß $E_{\alpha\alpha'}/E_{\beta\gamma}$ mit steigender Atomnummer monoton abnimmt und von $Z = 47$ an in dem von ihm untersuchten Bereich konstant wird.

Die vorliegende Untersuchung hat es sich zur Aufgabe gemacht, das Intensitätsverhältnis der K -Serienlinien nunmehr auch für schweratomigere Elemente so genau wie möglich festzulegen. Leider kommt der Bereich der seltenen Erden hierfür nicht in Frage; sie sind in der für das angewandte Verfahren erforderlichen Menge nicht vorhanden, und auch wohl kaum im nötigen Reinheitsgrade zu beschaffen. Denn gerade dieser ist, wie Grothey im Falle von Y(39) sogar quantitativ nachweisen konnte, von größter Bedeutung. Indessen erschien es aussichtsreich, die Untersuchung auf die Schwerelemente auszudehnen; denn neuerdings war durch Laubert⁹⁾ recht genaue Aufklärung über die Absorptionsverhältnisse im kurzwelligen Bereich der Schwerelemente gewonnen worden, auch waren im Laufe der letzten Jahre die für die Untersuchung erforderlichen Schwerelemente in möglichst hohem Reinheitsgrade durch das Institut beschafft worden. Wenn somit auch eine Lücke zwischen den Beobachtungen von Grothey und den Schwerelementen bestehen bleibt, schien es doch möglich, sie durch die Untersuchung der Schwerelemente zu überbrücken und damit ein einheitliches Bild über das Verhältnis $E_{\alpha\alpha'}/E_{\beta\gamma}$ von Co(27) bis Pb(82) zu gewinnen.

Außer der bereits erwähnten Absorptionsmethode, bei der die K -Kante des absorbierenden Elements zwischen die α - und β -Linie des emittierenden Elements fallen muß, wurde auch noch eine weitere Methode angewandt, bei der, entsprechend dem Filterdifferenzverfahren von Ross⁸⁾, zwei oder mehr absorbierende Elemente in Folienform so abgeglichen wurden, daß sie auf dem L -Ast in der Nähe der K -Kante gleich stark absorbierten.

Im Bereiche der Schwerelemente ergab sich schließlich die Möglichkeit, für einige derselben auch die Intensitätsverhältnisse $E_{\alpha'}/E_{\alpha}$, $E_{\alpha'}/E_{\beta\gamma}$, $E_{\alpha'}/E_{\beta}$ und $E_{\beta'}/E_{\gamma}$ zu untersuchen; denn hier finden sich K -Kanten, die zwischen die α - und α' -Linien oder zwischen die β - und γ -Linien einiger Elemente fallen.

Zur Untersuchung diente dieselbe Meßanordnung, wie sie Küstner und Trübestein¹⁰⁾ benutzten, indessen wurde nur mit einer Luftionisationskammer gemessen.

I. Die Meßverfahren

Für die Elemente, die in der vorliegenden Arbeit benutzt wurden, gibt Abb. 1 einen schematischen Überblick hinsichtlich der Lage ihrer K -Kanten und K -Serienlinien. Über ihre Herkunft, ihren Reinheitsgrad und ihre Form liefert Tab. 1 Aufschluß. Um die

L-Serie der emittierenden Elemente zu unterdrücken, stand fest zwischen diesen und der Luftionisationskammer ein Filter aus etwa 0,5 mm Cu, dessen Masse pro Flächeneinheit zu $\frac{m}{F} = 0,4482 \text{ g/cm}^2$ bestimmt wurde. Bei Anwendung des Filterdifferenzverfahrens nach Küstner¹⁾ wurden Cu-Filter als Differenzfilter verwendet; ihre Masse

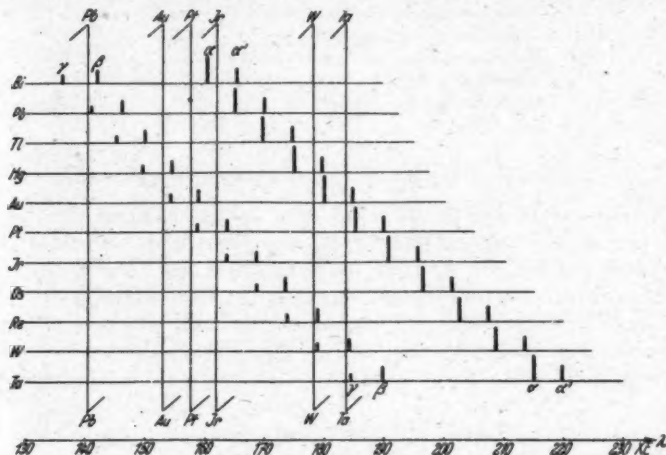


Abb. 1. Die Lage der Absorptionen und der Linien der Schwerelemente im Bereiche der K-Serie

Tabelle 1
Das Strahlmaterial

Strahler Element	Erhalten von	Reinheitsgrad	Beschaffenheit
Bi	Sch.	rein	Feilicht in Zaponlack
Pb	K.	pro analysi	gewalzte Folie
Tl	K.	rein	selbstgewalzte Folie
Hg	K.	gelb gefüllt	in Beutel aus 0,03 mm Cellophan
Au ^{*)}	H.	misch rein	Folien
Pt ^{*)}	H.		"
Ir ^{*)}	H.	Reiniridium	"
Os	H.	Chemisch rein	Pulver in Zaponlack
Re	L.		Folien " "
W ^{*)}	S. & H.		
Ta ^{*)}	S. & H.	etwa 99,9%	"

^{*)} Auch als Absorptionsfilter benutzt. H. = W. C. Heraeus.

K. = Kahlbaum-Schering. L. = Verein. Chem. Fabriken zu Leopoldshall.

Sch. = Schuchardt. S. & H. = Siemens & Halske.

pro Flächeneinheit wurde ebenfalls bestimmt (Tab. 2). Ihr Schwächungskoeffizient pro Masseneinheit wurde nach der von Laubert für einen sehr großen Wellenlängenbereich sichergestellten Formel berechnet (vgl. daselbst Tab. 8).

Tabelle 2
m/F der Cu-Filter in g/cm²

Strahler	Dicke etwa mm	m/F
U-Ta	4	3,6506
Yb	2,2	1,9978
Er	1,8	1,6566

II. Festlegung der Ästeschar mit Filterdifferenzverfahren

Es wurde sowohl für Ta- wie W-Absorbenten für alle 4 Linien $\alpha\alpha'\beta\gamma$ mit Filterdifferenz, aber ohne Selektivfilter das i/i_0 für eine Reihe von Strahlern bestimmt. Auf die Verwendung von Selektivfiltern und die Reduktion auf reine $K_{\alpha\alpha'}$ -Strahlung, wie sie Küstner⁹⁾ angegeben hat, wurde verzichtet, weil der Absorptionssprung der Selektivfilter an ihrer K-Kante für die geforderte Meßgenauigkeit nicht genau genug bekannt war (Tab. 3). Es wurden

Tabelle 3

Strahler	W-Filter		Ta-Filter	
	$\left(\frac{i}{i_0}\right)_{\text{beob.}}$	$(\mu d)_{\alpha\alpha'\beta\gamma}$	$\left(\frac{i}{i_0}\right)_{\text{beob.}}$	$(\mu d)_{\alpha\alpha'\beta\gamma}$
U 92	0,99819	0,92082	0,45009	0,79831
Th 91	0,35972	1,02243	0,40923	0,89384
Bi 83	0,20920	1,56447	0,25075	1,38330
Pb 82	0,18466	1,68924	0,23008	1,46933
Tl 81	0,16468	1,80375	0,21162	1,55294
Hg 80	0,28597	1,25187	0,19079	1,65658
Au 79	0,47829	0,73754	0,30966	1,17230
Pt 78	0,46225	0,77165	0,51055	0,87227
Ir 77	0,44173	0,81706	0,49439	0,70443
Os 76	0,42010	0,86726	0,47320	0,74824
Re 75	0,48629	0,72005	0,45465	0,78823
W 74	0,49923	0,69469	0,52216	0,64978
Ta 73	0,46979	0,75547	0,52698	0,64059
Yb 70	0,38081	0,96545	0,44161	0,81733
Er 68	0,32026	1,13862	0,38050	0,96626

Die Bestimmung von $(\mu d)_{\alpha\alpha'\beta\gamma}$ am W- und Ta-Sprungfilter.

dann unter der vorläufigen Voraussetzung, daß nach Duane und Stenström*)

$$(1) \frac{\alpha}{\alpha'} = 100:50 = 2:1; \quad \frac{\beta}{\gamma} = 35:15 = 7:3; \quad \frac{\alpha\alpha'}{\beta\gamma} = 150:50 = 3:1$$

sei, die mittleren Wellenlängen λ_m der K-Serien berechnet (Tab. 4) und die aus dem beobachteten i/i_0 berechneten Werte von $\log_{10}(\mu d)_m$ gegen $\log_{10} \lambda_m$ aufgetragen. Hierbei wurde ein außerordentlich großer

Tabelle 4

Die benutzten Wellenlängen und ihre Mittelwerte in Å

λ :	γ	β	α	α'	$\beta\gamma$	$\alpha\alpha'$	$\alpha\alpha'\beta\gamma$
U 92	0,10842	0,11187	0,12640	0,13095	0,11084	0,12792	0,12365
Th 90	11340	11690	13230	13680	11585	13390	12931
Bi 83 *)	13715	14205	16041	16525	14058	16202	15666
Pb 82	14125	14606	16516	17004	14465	16679	16125
Tl 81	14539	15011	16980	17468	14869	17142	16574
Hg 80 **)	14976	15450	17481	17967	15308	17643	17059
Au 79	15426	15902	17996	18483	15760	18158	17558
Pt 78	15887	16370	18523	19004	16225	18683	18069
Ir 77	16376	16850	19065	19550	16708	19227	18597
Os 76	16875	17361	19645	20131	17215	19807	19159
Re 75 **)	17379	17883	20244	20729	17732	20406	19737
W 74	17898	18422	20862	21345	18265	21023	20333
Ta 73	18452	18991	21488	21973	18829	21650	20945
Yb 70	20322	20875	23628	24098	20709	23785	23012
Er 68	21671	22257	25197	25664	22081	25352	24534

*) Logarithmisch korrigiert.

**) Sämtliche λ interpoliert.

Maßstab gewählt. In Ordinate und Abszisse entsprach die Einheit $\log_{10} 10$ dabei 100 cm, so daß 1 mm $2,3^0_{00}$ des Absolutwertes von $(\mu d)_m$ oder λ_m entsprach. Bildet man die Differenzen der gegebenen Wellenlängen (Tab. 4), so erkennt man, daß deren Schwankungen bereits nahe an die Unsicherheitsgrenze herankommen, so daß sich im Hinblick auf die Unzuverlässigkeit, mit der die Wellenlängen bisher bekannt sind, eine weitere Vergrößerung des Maßstabes nicht mehr lohnt. Durch die somit festgelegten Punkte ließen sich zwanglos Gerade für die K- und L-Äste von Ta und W legen. Auf den L-Ästen waren dabei Abweichungen der Punkte von den Geraden nicht mehr wahrnehmbar; auf den K-Ästen war eine geringe Streuung der Punkte zu erkennen, wobei jedoch die größte Abweichung der beobachteten $\log_{10}(\mu d)$ von der Geraden unter 3 mm, d. h. unterhalb 7^0_{00} blieb. Berücksichtigt man, daß die Geraden steil ansteigen, so genügt bereits eine Änderung von weniger als 3^0_{00} in der Wahl der Wellenlänge, um die Punkte auf die Geraden fallen zu lassen.

Es galt nun, aus den für alle 4 Linien α' , α , β und γ der K -Serie ermittelten geradlinigen Absorptionsästen diejenigen zu finden, die der mittleren Wellenlänge des $\alpha\alpha'$ -Dubletts entsprechen. Hierfür war folgende Überlegung maßgebend:

Das Intensitätsverhältnis der aus dem Strahler austretenden $\alpha\alpha'$ -Linien zu den $\beta\gamma$ -Linien sei

$$(2) \quad \frac{E_{\alpha\alpha'}}{E_{\beta\gamma}} = v.$$

Das Verhältnis der Ionisation in der Luftkammer zur auffallenden Energie sei $F(\lambda)$. Es wurde im Anschluß an Küstner und Trübe-stein¹⁰⁾ tabuliert (Tab. 5). Es ist ein für die vorliegende Untersuchung glücklicher Umstand, daß für den Wellenlängenbereich von

Tabelle 5

Das Verhältnis $F(\lambda)$ von Ionisation zu auffallender Energie nach Küstner und Trübe-stein.

$\lambda \text{ \AA}$	$F(\lambda)$	$\lambda \text{ \AA}$	$F(\lambda)$
0,10	0,000570	0,18	0,000647
11	584	19	678
12	562	20	716
13	566	21	761
14	574	22	813
15	586	23	872
16	602	24	938
17	622	25	1011

etwa 0,14—0,22 \AA , innerhalb dessen die Linien aller Strahler liegen, deren Intensität untersucht werden soll, das $F(\lambda)$ nur einen kleinen Gang aufweist, da es, von langen Wellen her, langsam abfallend, einem Minimum zustrebt (vgl. Abb. 3 von Küstner und Trübe-stein).

Es werden, wie üblich beim Filterdifferenzverfahren von Küstner, die Stellung des Differenzfilters zwischen Röntgenröhre und K -Strahler durch den Buchstaben A , die Differenzfilterstellung zwischen dem K -Strahler und der Ionisationskammer mit B gekennzeichnet. Weiterhin sollen sich die Indizes α' , α , β und γ auf die Serienlinie selbst, $\alpha\alpha'$ bzw. $\beta\gamma$ auf den Schwerpunkt der Intensität der betreffenden K -Serienlinien beziehen.

Befindet sich das Cu-Differenzfilter der Dicke D in der Stellung A zwischen Röntgenröhre und K -Strahler, so ist die Ionisation durch die 4 K -Serienlinien der Gesamtenergie E_0

$$(3) \quad i_{0,A} = E_0 \cdot \left[\frac{v}{1+v} \cdot F(\lambda)_{\alpha\alpha'} \cdot e^{-\mu_{\alpha\alpha'} d} + \frac{1}{1+v} \cdot F(\lambda)_{\beta\gamma} \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma} d} \right].$$

Die Exponentialfunktion bezieht sich dabei auf die bekannte Schwächung der Strahlung in dem oben erwähnten Cu-Schutzfilter gegen L-Strahlung von $d = 0,5$ mm Dicke. Wird das Cu-Differenzfilter in die Stellung B zwischen den K-Strahler und die Kammer gebracht, so wird die K-Strahlung c mal so intensiv erregt, weil die Primärstrahlung jetzt ungefiltert auf den K-Strahler auffällt. Der Wert von c wurde experimentell leicht für jeden K-Strahler gefunden, da die Streustrahlung der Schwerelemente gegenüber ihrer K-Strahlung verschwindend kleine Intensität besitzt. Zur Bestimmung von c schaltet man das Differenzfilter bei A abwechselnd ein und aus; das Verhältnis der Ionisationen durch die K-Strahlung ohne und mit Filter bei A liefert dann genau c . Seine Werte für die einzelnen Strahler zeigt Tab. 6. Diese Methode liefert die Schwächung nur

Tabelle 6
Zur Auswertung erforderliche Faktoren

Strahler	c	$1 - c \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma} d}$	$F(\lambda)_{\beta\gamma} \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma} d}$	Q
		$1 - c \cdot e^{-\mu_{\alpha\alpha'} d}$	$F(\lambda)_{\alpha\alpha'} \cdot e^{-\mu_{\alpha\alpha'} d}$	
U 92	2,705	0,5394	1,0553	0,5692
Th 90	2,900	0,5803	1,0554	0,6130
Bi 83	3,455	0,7433	1,0557	0,7862
Pb 82	3,573	0,7681	1,0584	0,8130
Tl 81	3,592	0,7972	1,0592	0,8444
Hg 80	3,833	0,8144	1,0603	0,8635
Au 79			1,0618	
Pt 78			1,0637	
Ir 77			1,0658	
Os 76			1,0674	
Re 75			1,0720	
W 74	5,335	0,9312	1,0762	1,0021
Ta 73	6,067	0,9426	1,0812	1,0192
Yb 70	3,680	0,8777	1,1070	0,9717
Er 68	3,990	0,8568	1,1450	0,9799

desjenigen Wellenlängenbereiches des erregenden kontinuierlichen Röntgenspektrums, welcher kurzwelliger ist als die K-Kante des charakteristischen Sekundärstrahlers, wie es sein soll.

In der Stellung B des Differenzfilters werden die 4 K-Serienlinien selbst im Differenzfilter geschwächt. Sie liefern dann die Ionisation:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} i_{0,B} = c \cdot E_0 \cdot \left[\frac{v}{1+v} \cdot F(\lambda)_{\alpha\alpha'} \cdot e^{-\mu_{\alpha\alpha'} d} \cdot e^{-\mu_{\alpha\alpha'} d} \right. \\ \left. + \frac{1}{1+v} \cdot F(\lambda)_{\beta\gamma} \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma} d} \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma} d} \right] \end{aligned} \right.$$

Hierin ist $\mu_{\alpha\alpha'}D$ und $\mu_{\beta\gamma}D$ für die K -Serienlinien im Cu-Differenzfilter ebenfalls bekannt.

Bringt man nun das Ta-Filter zwischen den Strahler und die Ionisationskammer, und wiederholt man die Ionisationsmessung bei den Differenzfilterstellungen A und B , so mißt man wegen der Schwächung der K -Strahlung im Ta-Filter die Ionisationen

$$(5) \quad \begin{cases} i_A = E_0 \cdot \left[\frac{v}{1+v} \cdot F(\lambda)_{\alpha\alpha'} \cdot e^{-\mu_{\alpha\alpha'}D} \cdot (e^{-\mu_{\alpha\alpha'}D})_{Ta} \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{1+v} \cdot F(\lambda)_{\beta\gamma} \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma}D} \cdot (e^{-\mu_{\beta\gamma}D})_{Ta} \right] \end{cases}$$

und

$$(6) \quad \begin{cases} i_B = c \cdot E_0 \cdot \left[\frac{v}{1+v} \cdot F(\lambda)_{\alpha\alpha'} \cdot e^{-\mu_{\alpha\alpha'}D} \cdot e^{-\mu_{\alpha\alpha'}D} \cdot (e^{-\mu_{\alpha\alpha'}D})_{Ta} \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{1+v} \cdot F(\lambda)_{\beta\gamma} \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma}D} \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma}D} \cdot (e^{-\mu_{\beta\gamma}D})_{Ta} \right]. \end{cases}$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$(7) \quad \begin{cases} v \cdot F(\lambda)_{\alpha\alpha'} \cdot e^{-\mu_{\alpha\alpha'}D} \cdot [1 - c \cdot e^{-\mu_{\alpha\alpha'}D}] = U, \\ F(\lambda)_{\beta\gamma} \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma}D} \cdot [1 - c \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma}D}] = V, \end{cases}$$

wobei U und V außer v nur bekannte Größen enthalten, so wird das Ionisationsverhältnis

$$(8) \quad \begin{cases} \left(\frac{i}{i_0} \right)_{\text{beob.}} = (e^{-\mu D})_{Ta \text{ beob.}} = \frac{i_A - i_B}{i_{0,A} - i_{0,B}} \\ \quad = \frac{U}{U+V} \cdot (e^{-\mu_{\alpha\alpha'}D})_{Ta} + \frac{V}{U+V} \cdot (e^{-\mu_{\beta\gamma}D})_{Ta}. \end{cases}$$

Da nun für den Massenschwächungskoeffizienten der Schwerelemente auf dem K - und L -Ast ein Gesetz der Form

$$(9) \quad \frac{\mu}{\rho} = C \cdot \lambda^n$$

gilt, so folgt

$$(10) \quad \left(\frac{\mu_{\alpha\alpha'}D}{\mu_{\beta\gamma}D} \right)_{Ta} = \left(\frac{\lambda_{\alpha\alpha'}}{\lambda_{\beta\gamma}} \right)^n = k$$

oder

$$(11) \quad (\mu_{\beta\gamma}D)_{Ta} = \frac{(\mu_{\alpha\alpha'}D)_{Ta}}{k}$$

Da wir die mittleren Wellenlängen $\lambda_{\alpha\alpha'}$ und $\lambda_{\beta\gamma}$ kennen und das n aus der Neigung der Absorptionsäste bestimmen können, die wir für Ta und W, wie oben beschrieben, mit den 4 K -Serienlinien verschiedener Strahler ermittelt haben, so kennen wir aus (10) auch k und können für (8) jetzt setzen

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{i}{i_0} \right)_{\text{beob.}} &= (e^{-\mu D})_{\text{beob.}} = \frac{i_A - i_B}{i_{0,A} - i_{0,B}} \\ &= \frac{U}{U+V} \cdot (e^{-\mu_{aa'} D})_{T_A} + \frac{V}{U+V} \cdot \left(e^{-\frac{\mu_{aa'} D}{k}} \right)_{T_A}. \end{aligned} \right.$$

Da (12) nur bekannte Größen außer v und $(\mu_{aa'} D)_{T_A}$ enthält, so kann dieses aus (12) für ein vorgegebenes v gefunden werden. Es ist indessen nicht möglich, $(\mu_{aa'} D)_{T_A}$ aus (12) explizit darzustellen. Es wurden daher zwei Wege beschritten, um es zu erhalten. Der eine Weg war der:

Entwickelt man (12) nach Potenzreihen, so erhält man

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{i}{i_0} \right)_{\text{beob.}} &= 1 - \frac{\frac{U}{V} + \frac{1}{k}}{\frac{U}{V} + 1} \cdot \mu_{aa'} D + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\frac{U}{V} + \frac{1}{k^2}}{\frac{U}{V} + 1} \cdot (\mu_{aa'} D)^2 - \dots + \dots \\ &= 1 - R_1 \cdot \mu_{aa'} D + \frac{1}{2!} \cdot R_2 \cdot (\mu_{aa'} D)^2 - \frac{1}{3!} \cdot R_3 \cdot (\mu_{aa'} D)^3 + \dots \end{aligned} \right.$$

Wie die spätere Auswertung lehrt, sind $\frac{1}{k} = 0,7$ und, im ungünstigsten Falle, $\frac{U}{V} = 3,49$. Dann ist

$$R_1 = 0,932.$$

Läßt man nun die Näherung gelten

$$R_2 = 0,885 \sim R_1^2 = 0,869,$$

$$R_3 = 0,851 \sim R_1^3 = 0,809,$$

so liefert

$$(14) \quad \left(\frac{i}{i_0} \right)_{\text{beob.}} \sim [e^{-R_1 \cdot (\mu_{aa'} D)_1}]_{T_A}$$

einen ersten Näherungswert für $(\mu_{aa'} D)_1$. Aus der bekannten Korrekturformel

$$(15) \quad \Delta x_1 = - \frac{f(x_1) - y}{f'(x_1)}$$

folgt dann als erste Korrektur zu $(\mu_{aa'} D)_1$

$$(16) \quad \Delta(\mu_{aa'} D)_1 = \frac{U \cdot e^{-(\mu_{aa'} D)_1} + V \cdot e^{-\frac{(\mu_{aa'} D)_1}{k}} - \left(\frac{i}{i_0} \right)_{\text{beob.}}}{U \cdot e^{-(\mu_{aa'} D)_1} + \frac{V}{k} \cdot e^{-\frac{(\mu_{aa'} D)_1}{k}}},$$

und mit ihrer Hilfe

$$(17) \quad (\mu_{aa'} D)_2 = (\mu_{aa'} D)_1 + \Delta(\mu_{aa'} D)_1.$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens gelangt man bald zu einem Werte von $\mu_{aa'} D$, der sich durch weitere Korrektur nicht

mehr nennenswert ändert und als die endgültige Lösung für das vorgegebene v angesprochen werden kann.

Indem man das geschilderte Verfahren nacheinander auf verschiedene vorgegebene Werte von v anwendet, findet man zu jedem mit allen vier K -Serienlinien gemessenen Werte $\left(\frac{i}{i_0}\right)_{\text{beob.}}$ einen entsprechenden Wert $\mu_{\alpha\alpha'} D$, deren jeder einem vorgegebenen Werte v entspricht, und damit eine entsprechende Schar von K - und L -Ästen.

Der andere Weg war folgender:

Setzt man zur Abkürzung im Anschluß an (7)

$$(18) \quad Q = \frac{F(\lambda)_{\beta\gamma} \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma} d} \cdot [1 - c \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma} D}]}{F(\lambda)_{\alpha\alpha'} \cdot e^{-\mu_{\alpha\alpha'} d} \cdot [1 - c \cdot e^{-\mu_{\alpha\alpha'} D}]} = v \cdot \frac{V}{U},$$

so läßt sich die Gl. (12) auf die Form bringen

$$(19) \quad v = Q \cdot \left[\frac{e^{-\frac{\mu_{\alpha\alpha'} D}{k}} - \left(\frac{i}{i_0}\right)_{\text{beob.}}}{\left(\frac{i}{i_0}\right)_{\text{beob.}} - e^{-\mu_{\alpha\alpha'} D}} \right]_{T_0}$$

Da Q nur bekannte Größen enthält, kann man für eine Anzahl beliebig gewählter Werte von $\mu_{\alpha\alpha'} D$ die zugehörigen Werte von v berechnen; indem man diese in Abhängigkeit von $\mu_{\alpha\alpha'} D$ aufträgt, erhält man eine Kurve, aus der sich leicht die beliebig vorgegebenen Werten von v entsprechenden Werte von $\mu_{\alpha\alpha'} D$ entnehmen lassen. Auf diese Weise ergibt sich wiederum, wie auf dem ersten Wege, je eine Schar von K - und L -Ästen, deren jeder einem bestimmten v und den mittleren Wellenlängen $\lambda_{\alpha\alpha'}$ entspricht.

Für W als Absorbens wurde ebenso vorgegangen.

Die L -Äste ließen sich durch die Beziehung

$$(20) \quad \log_{10}(\mu d) = L + 2,605 \cdot \log_{10} \lambda$$

darstellen. Sie waren alle einander vollkommen parallel. Die Werte der Konstanten L gibt Tab. 7.

Tabelle 7
Die Konstanten der Gl. (20) und (21) für verschiedene v

v	K -Äste		K_W	L -Äste	
	n	K_{T_0}		L_{T_0}	L_W
2	2,382	2,0641	2,1254	1,5882	1,6605
2,5	2,369	2,0471	2,1084	1,5808	1,6531
3	2,359	2,0343	2,0956	1,5753	1,6476
3,5	2,350	2,0235	2,0848	1,5711	1,6434
4	2,343	2,0150	2,0763	1,5676	1,6399
4,5	2,337	2,0078	2,0691	1,5646	1,6369

Bei den K-Ästen liefen zwar diejenigen für W und Ta einander völlig parallel, die demselben v zugehörten; indessen besaßen die K-Äste desselben Absorbenten für verschiedenes v auch verschiedene Neigung. Sie genügten der Beziehung

$$(21) \quad \log_{10}(\mu d) = K + n \cdot \log_{10} \lambda,$$

deren Konstanten K und n die Tab. 7 ebenfalls angibt. Dabei entspricht n dem Exponenten n der Wellenlänge λ in (9).

Wir können hiermit den K-Absorptionssprung für verschiedene Werte von v berechnen; es erweist sich, daß das Ergebnis (Tab. 8) von der Annahme über v nur wenig beeinflusst wird. Ferner zeigt sich deutlich in Übereinstimmung mit Rindfleisch¹¹⁾, daß der K-Sprung bei Ta (73) größer ist als bei W (74); allerdings soll nach der Gesetzmäßigkeit von Rindfleisch, die sich auf zahlreiche Elemente sehr verschiedener Atomnummer stützt, der Sprungunterschied zwischen Ta und W nur 0,9% betragen, während er hier etwa 1,8% ausmacht. Indessen ist es sehr schwer, den Unterschied der K-Sprünge bei Untersuchung von zwei benachbarten Elementen allein überhaupt nachzuweisen, so daß das Ergebnis als gut bezeichnet werden darf.

Tabelle 8
Der beobachtete K-Sprung von Ta und W

Beobachter	v	Ta (73)		W (74)	
		μ_2/μ_1	$\Delta\%$	μ_2/μ_1	$\Delta\%$
Voth	2	4,365	-0,23	4,284	-0,70
	3	4,366		4,287	+1,61
	4,5	4,370	+0,92	4,294	
Rindfleisch	—	4,450	—	4,413	—
$\Delta\%$	—	-1,9	—	-2,9	—

Berechnet man aus (20) und (21) das μd für die $\alpha\alpha'$ -Linien der Schwerelemente Re (75) bis Au (79), wobei man $v = 3,0$ setzt, was, wie wir sehen werden, etwa den Intensitätsverhältnissen der aus den Strahlern austretenden Linien entspricht, und dividiert man das μd durch die Masse pro Flächeneinheit der Filter Ta und W, so erhält man für diese die Werte von μ/ρ . Vergleicht man sie mit den Beobachtungen von Laubert⁵⁾ oder mit den Werten, die sich aus den in seiner Tab. 8 gegebenen Formeln berechnen lassen, so findet man sowohl für Ta als auch für W auf den L- und K-Ästen nur Unterschiede von wenigen Prozentsen, die durchaus der von ihm erreichten Meßgenauigkeit entsprechen.

III. Das Einfilterverfahren (Sprungmethode)

Dieses Verfahren wurde bereits von Küstner⁵⁾ und von Grothey¹⁾ angewandt. Benutzt man W als Sprungfilter, so kann man, entsprechend Abb. 1, das Verhältnis $E_{\alpha\alpha'}/E_{\beta\gamma}$ für die Elemente Os, Ir, Pt und Au bestimmen. Hingegen erlaubt Ta als Sprungfilter, das $E_{\alpha\alpha'}/E_{\beta\gamma}$ für die Elemente Re, Os, Ir und Pt zu ermitteln. Die an den beiden Filtern für diese Elemente beobachteten Werte von (i/i_0) gibt Tab. 3 zwischen den punktierten waagerechten Linien.

Zur Auswertung benutzen wir (19). Dabei ist aber zu bedenken, daß die Elemente, deren $E_{\alpha\alpha'}/E_{\beta\gamma}$ bestimmt werden soll, nicht nach dem Filterdifferenzverfahren behandelt wurden; bei ihnen stand, wenn (i/i_0) beobachtet wurde, das Differenzfilter von 4 mm Cu zwischen Röntgenröhre und Strahler, so daß ein Strahlungsgemisch von 180 kV und 4 mm Cu-Filterung zur Anregung diente. Aus diesem Grunde wird der zweite Summand in den eckigen Klammern von (7) gleich Null, und (19) nimmt die Form an

$$(22) \quad v = \frac{F(\lambda)_{\beta\gamma} \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma} d} \cdot \left(\frac{i}{i_0} \right)_{\text{beob.}} - e^{-\mu_{\beta\gamma} D}}{F(\lambda)_{\alpha\alpha'} \cdot e^{-\mu_{\alpha\alpha'} d} \cdot e^{-\mu_{\alpha\alpha'} D} - \left(\frac{i}{i_0} \right)_{\text{beob.}}}$$

Die Werte des ersten Bruches gibt Tab. 6. Die Exponentialwerte des zweiten Bruches lassen sich zwar aus den Gl. (20) und (21) und der Tab. 7 berechnen; ihr Wert ist aber selbst von v abhängig.

Tabelle 9
Ermittlung von $E_{\alpha\alpha'}/E_{\beta\gamma}$ für Os-Strahler und Ta-Filter

v_0	2	2,5	3	3,5	4	4,5
$\left(\frac{i}{i_0} \right)_{\text{beob.}}$	0,4732	0,4732	0,4732	0,4732	0,4732	0,4732
$e^{-\mu_{\beta\gamma} d}$	0,1729	0,1790	0,1816	0,1843	0,1867	0,1886
Zähler	0,3003	0,2952	0,2916	0,2889	0,2865	0,2846
$e^{-\mu_{\alpha\alpha'} d}$	0,5651	0,5705	0,5746	0,5776	0,5802	0,5824
$\left(\frac{i}{i_0} \right)_{\text{beob.}}$	0,4732	0,4732	0,4732	0,4732	0,4732	0,4732
Nenner	0,0919	0,0973	0,1014	0,1044	0,1070	0,1092
Bruch	3,267	3,034	2,875	2,766	2,676	2,604
$v = \frac{E_{\alpha\alpha'}}{E_{\beta\gamma}}$	3,490	3,240	3,070	2,954	2,858	2,782
v/v_0	1,745	1,296	1,023	0,844	0,714	0,618

Um die Lösung von (22) zu finden, wollen wir von der Annahme ausgehen, daß für den Strahler dasselbe v gelte wie für seine Nachbarlemente, deren Strahlung zur Festlegung der K- und L-Äste diene. Wie wir später sehen werden, ist diese Voraussetzung auf etwa $\pm 3\%$ erfüllt. Die Lösung läßt sich dann nach einem graphischen Verfahren finden; als Beispiel diene die Untersuchung des Os-Strahlers mit dem Ta-Filter (Tab. 9). Zunächst wird der zweite Bruch von (22) für beliebig vorgegebene Werte $v_0 = 2 \dots$ bis $v_0 = 4,5$ ausgewertet; das Ergebnis wird mit dem ersten Bruch

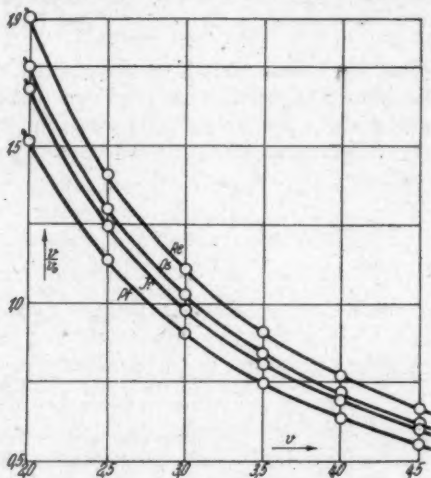


Abb. 2. Die graphische Bestimmung von v aus $\frac{v}{v_0} = 1$

von (22) multipliziert, dessen Wert der Tab. 6 entnommen ist. Man erkennt, daß das Ergebnis für v in der linken Hälfte der Tab. 9 größer, in ihrer rechten Hälfte kleiner ausfällt, als das zugehörige v_0 . Der wahre Wert von v muß also zwischen 3 und 3,5 liegen. Um ihn zu erhalten, wurde das Verhältnis v/v_0 gebildet und in Abhängigkeit von v aufgetragen; Abb. 2 zeigt dies für das Ta-Filter und die Elemente Re bis Pt. Wo die durch die Punkte gezogenen Kurven den Ordinatenwert 1 haben, liefert die Abszisse das gesuchte Ergebnis $v = v_0$. Auf diesem Wege fanden sich mit Hilfe der Ta- und W-Filter bei den Elementen Re bis Au für die *austretende Strahlung* die in Tab. 10 zusammengestellten Intensitätsverhältnisse $\left(\frac{E_{aa'}}{E_{\beta\gamma}}\right)_a$. Das Intensitätsverhältnis der austretenden Linien

Tabelle 10
Die Ergebnisse für $E_{\alpha\alpha'}/E_{\beta\gamma}$ nach dem Sprungverfahren

	Strahler	Re 75	Os 76	Ir 77	Pt 78	Au 79
$\left(\frac{E_{\alpha\alpha'}}{E_{\beta\gamma}}\right)_a$	Ta-Filter	3,250	3,050	2,950	2,770	—
	W-Filter	—	2,990	2,910	2,800	2,606
	F_1	1,173	1,177	1,152	1,147	1,158
$\frac{E_{\alpha\alpha'}}{E_{\beta\gamma}}$	Ta-Filter	3,814	3,593	3,400	3,180	—
	W-Filter	—	3,521	3,352	3,214	3,017

unterliegt indessen noch dem Einfluß der Absorption von Primärstrahlung und sekundärer K -Strahlung im Strahler selbst. Um diesen auszuschalten, hat man die Werte der Tab. 10 noch mit Faktoren F_1 zu multiplizieren, die nach Küstner²⁾ gegeben sind durch die Beziehung

$$(23) F_1 = \frac{\int_{x=0}^{x=D \cdot \sqrt{2}} e^{-(\mu_p + \mu_{\beta\gamma})x} \cdot dx \cdot \left(\left(\frac{i}{i_0}\right)_p \cdot \left(\frac{i}{i_0}\right)_{\beta\gamma} \Big|_{d_1} + \left(\frac{i}{i_0}\right)_p \cdot \left(\frac{i}{i_0}\right)_{\beta\gamma} \Big|_{d_2} + \dots \right)}{\int_{x=0}^{x=D \cdot \sqrt{2}} e^{-(\mu_p + \mu_{\alpha\alpha'})x} \cdot dx \cdot \left(\left(\frac{i}{i_0}\right)_p \cdot \left(\frac{i}{i_0}\right)_{\alpha\alpha'} \Big|_{d_1} + \left(\frac{i}{i_0}\right)_p \cdot \left(\frac{i}{i_0}\right)_{\alpha\alpha'} \Big|_{d_2} + \dots \right)}$$

Da als Primärstrahlung keine monochromatische Strahlung, sondern der Teil des mit 4 mm Cu gefilterten und bei 180 kV erzeugten kontinuierlichen Spektrums der Wolframantikathode diente, der kurzwelliger ist als die K -Kante des Sekundärstrahlers, so mußte die Absorption dieses Primärstrahlbereichs im Sekundärstrahler selbst in Abhängigkeit von der Dicke desselben ermittelt werden. Dies geschah auf dem von Küstner²⁾ angegebenen Wege für die Elemente W und Pb. Um beispielsweise die Absorptionskurve der Primärstrahlung in Pb zu erhalten, wurde Pb als Sekundärstrahler gewählt. Es wurden dann der Reihe nach Bleifolien zunehmender Dicke, deren Masse pro Flächeneinheit m/F besonders bestimmt worden war, zwischen Röhre und Bleistrahler gebracht und die Ionisation der Pb- K -Strahlung für jede Pb-Folie mit derjenigen verglichen, die der Pb-Strahler ohne Vorschalten einer Pb-Folie aussandte. Als Ergebnis wurde das $\left(\frac{i}{i_0}\right)_p$ für Pb in Abhängigkeit von m/F als Kurve aufgetragen; bei W wurde entsprechend vorgegangen. Dabei zeigte sich ein verhältnismäßig kleiner Unterschied im Verlaufe der Kurven für $\left(\frac{i}{i_0}\right)_p$ bei W und Pb, so daß für die

anderen Strahler zwischen beiden Kurven interpoliert werden konnte. Die jedem Strahler zugehörigen Kurven $\left(\frac{i}{i_0}\right)_{\alpha\alpha'}$ und $\left(\frac{i}{i_0}\right)_{\beta\gamma}$ wurden im Anschluß an die Untersuchungen von Laubert⁶⁾ gewonnen, indem die Werte von μ/ρ nach seiner Tab. 8 berechnet und die Ergebnisse hinsichtlich ihres Fortschreitens von Element zu Element graphisch geglättet worden waren. So ergaben sich für jeden Strahler je 3 Kurven $\left(\frac{i}{i_0}\right)_\beta$, $\left(\frac{i}{i_0}\right)_{\alpha\alpha'}$ und $\left(\frac{i}{i_0}\right)_{\beta\gamma}$ in Abhängigkeit von m/F . Gemäß (23) wurde dann für sehr schmale Streifen $\Delta_{m/F}$ graphisch integriert. Die Integration war durchzuführen von $\frac{m}{F} = 0$ bis zum

Werte $\frac{m}{F} \cdot \sqrt{2}$, weil der Strahler unter 45° von der Primärstrahlung getroffen wurde und auch die Beobachtungsrichtung unter 45° lag. Dienten Folien oder Bleche als Strahler, so war deren m/F leicht durch Wägung und Flächenmessung zu bestimmen. Bei pulverförmigen Strahlern war dies indessen nicht möglich. Hier wurde folgendes Verfahren eingeschlagen, das zuvor an einem Pt-Blech, dessen m/F bekannt war, kontrolliert wurde und sich bewährt hatte. Der pulverförmige Strahler wurde, unter 45° geneigt, in den Weg einer monochromatischen Strahlung gebracht und das i/i_0 bestimmt. Daraus ergab sich die Schwächung, da $\frac{i}{i_0} = e^{-\mu d}$ ist. Da das $\frac{\mu}{\rho}$ für die benutzte Strahlung in dem pulverförmigen absorbierenden Strahler bekannt war, so folgte aus dem beobachteten μd das $\frac{m}{F} = \mu d : \left(\frac{\mu}{\rho}\right)$. Übrigens ergaben die Integrationen, daß nicht alle Strahler völlige Sättigungsdicke besaßen; daher zeigt auch die Zusammenstellung der Faktoren F_1 in Tab. 11 kleine, unregelmäßige Schwankungen, die dem Mangel an Sättigungsdicke der Strahler Rechnung tragen. Tab. 11 enthält auch die Faktoren F_1 für andere Linienkombinationen, die nach demselben Verfahren bestimmt wurden.

Außer F_1 hat Grothey noch 3 weitere Faktoren berücksichtigt. Sein Faktor F_2 trägt der Schwächung der K-Strahlung durch die

Tabelle 11

Die Faktoren F_1 für verschiedene Kombinationen von K-Serienlinien

Strahler	W 74	Re 75	Os 76	Ir 77	Pt 78	Au 79	Hg 80	Tl 81	Pb 82	Bi 83
$\alpha\alpha'/\beta\gamma$	—	1,173	1,177	1,152	1,147	1,158	1,165	1,161	1,157	—
$\alpha/\beta\gamma$	—	—	—	—	—	1,146	1,143	—	—	—
α'/α	—	—	—	—	—	1,031	1,027	—	—	1,016
α/β	—	—	—	—	—	1,125	1,134	—	—	1,117
β/γ	1,048	1,044	—	—	1,042	1,029	1,026	—	—	—

Luft auf dem Wege zur Ionisationskammer Rechnung. Er beträgt indessen schon bei Tellur (52) nur noch 1,003 und unterscheidet sich bei den hier verwandten wesentlich kurzwelligeren Strahlen überhaupt nicht mehr von 1, so daß er vernachlässigt werden darf.

Grotheys Faktor $F_3 = \frac{F^{(\lambda)}_{\beta\gamma}}{F^{(\lambda)}_{\alpha\alpha'}}$ berücksichtigt das Verhältnis der Ionisation zur auffallenden Energie und ist in unserer Formel (22) ebenfalls enthalten. Sein Faktor

$$F_4 = \frac{1 - c \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma} D}}{1 - c \cdot e^{-\mu_{\alpha\alpha'} D}}$$

tritt bei der vorliegenden Arbeit zwar auch in (18) auf, wo das Filterdifferenzverfahren zur Festlegung der K- und L-Äste dient;

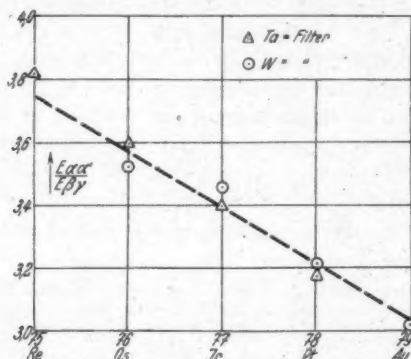


Abb. 3. Die Ergebnisse für $E_{\alpha\alpha'}/E_{\beta\gamma}$ nach der Sprungmethode bei Re bis Au

bei der Bestimmung von $E_{\alpha\alpha'}/E_{\beta\gamma}$ wurde hier indessen ohne Filterdifferenzverfahren gearbeitet, wodurch $F_4 = 1$ wird [vgl. Gl. (22)]. Die Ergebnisse für $E_{\alpha\alpha'}/E_{\beta\gamma}$ nach dem Sprungverfahren sind aus Tab. 10 und Abb. 3 zu ersehen.

Wie Abb. 1 lehrt, lassen sich nach der Sprungmethode mit Ta-Filter für die austretende Strahlung auch die Intensitätsverhältnisse $E_{\alpha}/E_{\alpha'}$ von Au und E_{β}/E_{γ} von W, mit W-Filter die Intensitätsverhältnisse $E_{\alpha}/E_{\alpha'}$ von Hg und E_{β}/E_{γ} von Re bestimmen. Setzen wir

$$(24) \quad \frac{E_{\alpha}}{E_{\alpha'}} = w, \quad \text{also} \quad \frac{E_{\alpha}}{E_{\alpha'}} = \frac{w}{1+w}, \quad \frac{E_{\alpha'}}{E_{\alpha\alpha'}} = \frac{1}{1+w}$$

und

$$(2) \quad \frac{E_{\alpha\alpha'}}{E_{\beta\gamma}} = v$$

als bekannt voraus, so liefert die Beobachtung ohne Sprungfilter

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} i_{0, \text{beob.}} &= E_a \cdot F(\lambda)_a \cdot e^{-\mu_a d} + E_{a'} \cdot F(\lambda)_{a'} \cdot e^{-\mu_{a'} d} \\ &+ E_{\beta\gamma} \cdot F(\lambda)_{\beta\gamma} \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma} d} = E_0 \cdot \left\{ \frac{v}{1+v} \right. \\ &\cdot \left[\frac{w}{1+w} \cdot F(\lambda)_a \cdot e^{-\mu_a d} + \frac{1}{1+w} \cdot F(\lambda)_{a'} \cdot e^{-\mu_{a'} d} \right] \\ &\left. + \frac{1}{1+v} \cdot F(\lambda)_{\beta\gamma} \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma} d} \right\} \end{aligned} \right.$$

und mit Sprungfilter

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} i_{\text{beob.}} &= E_0 \cdot \left\{ \frac{v}{1+v} \cdot \left[\frac{w}{1+w} \cdot F(\lambda)_a \cdot e^{-\mu_a d} \cdot e^{-\mu_a D_K} \right. \right. \\ &+ \left. \frac{1}{1+w} \cdot F(\lambda)_{a'} \cdot e^{-\mu_{a'} d} \cdot e^{-\mu_{a'} D_L} \right] \\ &\left. + \frac{1}{1+v} \cdot F(\lambda)_{\beta\gamma} \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma} d} \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma} D_K} \right\}, \end{aligned} \right.$$

wobei sich die Indizes K und L auf die entsprechenden Äste des Sprungfilters beziehen. Setzen wir zur Abkürzung

$$(27) \quad \frac{F(\lambda)_{a'} \cdot e^{-\mu_{a'} d}}{F(\lambda)_a \cdot e^{-\mu_a d}} = P_{a'}, \quad \frac{F(\lambda)_{\beta\gamma} \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma} d}}{F(\lambda)_a \cdot e^{-\mu_a d}} = P_{\beta\gamma},$$

so erhalten wir aus (25) und (26)

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{E_a}{E_{a'}} &= w \\ v \cdot P_{a'} \cdot \left[e^{-\mu_{a'} D_L} - \left(\frac{i}{i_0} \right)_{\text{beob.}} \right] - P_{\beta\gamma} \cdot \left[\left(\frac{i}{i_0} \right)_{\text{beob.}} - e^{-\mu_{\beta\gamma} D_K} \right] \\ &= \frac{v \cdot \left[\left(\frac{i}{i_0} \right)_{\text{beob.}} - e^{-\mu_a D_K} \right] + P_{\beta\gamma} \cdot \left[\left(\frac{i}{i_0} \right)_{\text{beob.}} - e^{-\mu_{\beta\gamma} D_K} \right]}{v \cdot \left[\left(\frac{i}{i_0} \right)_{\text{beob.}} - e^{-\mu_a D_K} \right] + P_{\beta\gamma} \cdot \left[\left(\frac{i}{i_0} \right)_{\text{beob.}} - e^{-\mu_{\beta\gamma} D_K} \right]} \end{aligned} \right.$$

Ferner sei für die austretende Strahlung

$$(29) \quad \frac{E_\beta}{E_\gamma} = u, \quad \text{also} \quad \frac{E_\beta}{E_{\beta\gamma}} = \frac{u}{1+u}, \quad \frac{E_\gamma}{E_{\beta\gamma}} = \frac{1}{1+u}.$$

Dann liefert die entsprechende Rechnung, wenn wir zur Abkürzung

$$(30) \quad \frac{F(\lambda)_\beta \cdot e^{-\mu_\beta d}}{F(\lambda)_{a'} \cdot e^{-\mu_{a'} d}} = P_\beta, \quad \frac{F(\lambda)_\gamma \cdot e^{-\mu_\gamma d}}{F(\lambda)_{a'} \cdot e^{-\mu_{a'} d}} = P_\gamma,$$

setzen:

$$(31) \quad \frac{E_\beta}{E_\gamma} = u = \frac{P_\gamma \cdot \left[\left(\frac{i}{i_0} \right)_{\text{beob.}} - e^{-\mu_\gamma D_K} \right] - v \cdot \left[e^{-\mu_{a'} D_L} - \left(\frac{i}{i_0} \right)_{\text{beob.}} \right]}{P_\beta \cdot \left[e^{-\mu_\beta D_L} - \left(\frac{i}{i_0} \right)_{\text{beob.}} \right] + v \cdot \left[e^{-\mu_{a'} D_L} - \left(\frac{i}{i_0} \right)_{\text{beob.}} \right]}.$$

Die beobachteten Werte von (i/i_0) gibt Tab. 3. Mit ihrer Hilfe wurden die Formeln (28) und (31) für $v = 2,5$, $v = 3$ und $v = 3,5$

berechnet und die Ergebnisse in Abhängigkeit von v als Kurven dargestellt. Für die der austretenden Strahlung entsprechenden Werte von v konnten dann die Ergebnisse aus den Kurven abgelesen werden. Es ergab sich nach Multiplikation mit den Faktoren F_1 der Tab. 11:

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{E_{\alpha'}}{E_{\alpha}} \Big|_{\text{Au}} = 0,600; & \frac{E_{\alpha'}}{E_{\alpha}} \Big|_{\text{Hg}} = 0,603; \\ \frac{E_{\beta}}{E_{\gamma}} \Big|_{\text{Re}} = 2,537; & \frac{E_{\beta}}{E_{\gamma}} \Big|_{\text{W}} = 3,335. \end{array} \right.$$

Die Besprechung der Ergebnisse soll erst später gemeinsam mit den nach anderen Verfahren erhaltenen Ergebnissen erfolgen.

IV. Das Zweifilterverfahren

Das Zweifilterverfahren wurde im Anschluß an das von Ross⁹⁾ angegebene Verfahren durchgeführt. Das Verfahren von Ross hat die Erzeugung monochromatischer Röntgenstrahlen zum Ziel. Es geht von der Voraussetzung aus, daß zwei Elemente, die im periodischen System benachbart sind, einen K -Absorptionssprung gleicher Größe besitzen und daß sowohl ihre K -Äste als auch ihre L -Äste parallel verlaufen. Gleicht man zwei Filter, die aus solchen Elementen (oder auch aus gleichartigen Verbindungen solcher Elemente) bestehen, z. B. derart, daß man das eine der beiden schräg in den Strahlengang setzt, mit monochromatischen Strahlen so ab, daß sie auf einem Absorptionsast, z. B. dem L -Ast, gleich stark absorbieren; bringt man sie dann nacheinander als Absorbenten in die völlig inhomogene Strahlung, die von einer Antikathode ausgeht, und mißt man in beiden Fällen die Ionisation, die die durchgelassene Strahlung verursacht, so soll die Differenz der beiden beobachteten Ionisationen dem schmalen Spektralbereich entsprechen, der zwischen den K -Kanten der beiden Filterelemente liegt, weil sich die Ionisationen durch alle anderen Wellenlängen wegheben sollen.

Indessen ist schon die Voraussetzung falsch, auf der sich das Verfahren aufbaut. Zwar ist für völlig oder nahezu benachbarte Elemente die Bedingung der Parallelität ihrer Absorptionsäste genau genug erfüllt; es ist aber sichergestellt, und zwar quantitativ durch die Untersuchung von Rindfleisch¹¹⁾, daß die Größe des K -Sprunges von Element zu Element abnimmt. Die Folge hiervon ist, daß von zwei Absorbenten, die auf ihren L -Ästen gleich stark absorbieren, außer der monochromatischen Strahlung zwischen ihren K -Kanten auch noch eine inhomogene Strahlung zur Wirkung gelangt, die sich aus allen Wellenlängen des kontinuierlichen Spektrums zusammensetzt, die

kurzwelliger sind als die K-Kante des schweratomigeren der beiden Filter. Die Intensität dieser ungewollten inhomogenen Strahlung ist aber keineswegs zu vernachlässigen gegenüber der gewollten, homogenen Strahlung, die zwischen den beiden K-Kanten Durchlaß findet. Es hilft hier auch nichts, wenn man an Stelle von Elementen benachbarter Atomnummer solche wählt, deren Atomnummern sich um mehr als 1 unterscheiden; in gleichem Maße wie der Abstand ihrer K-Kanten wird auch der Abstand ihrer K-Absorptionsäste größer, und mit der Intensität der homogenen Strahlung steigt dann auch diejenige der inhomogenen Strahlung an.

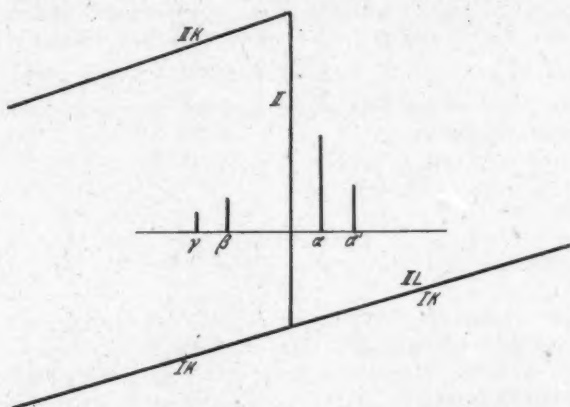


Abb. 4. Zum Zweifilterverfahren: Ausnutzung des K-Sprungs nur bei einem der Filter

Wesentlich günstiger liegen die Dinge dann, wenn man mit monochromatischen Strahlen arbeitet. Man kann dann den im vorstehenden beschriebenen Fehler überhaupt ausschließen. Dies soll an folgendem erläutert werden.

Als Filter diene ein Element I, das in dem zu durchforschenden Wellenlängenbereich keinen Absorptionssprung besitzt z.B. Sn. Sein K-Absorptionsast ist in Abb. 4 mit I_K bezeichnet. Wir gleichen nun ein zweites Filter, das aus dem Element II besteht, in unserem Wellenlängenbereich aber einen K-Sprung aufweist, so gegen I ab, daß die Absorption auf dem L-Ast von II genau so groß ist wie die Absorption von I auf dessen K-Ast. Fällt nun die K-Kante von II zwischen die α - und β -Linien eines Strahlers, so können wir das Intensitätsverhältnis $E_{\alpha\alpha'}/E_{\beta}$, der aus dem Strahler austretenden

Strahlung bestimmen, wenn wir sie abwechselnd mit den Filtern I und II nach der Ionisationsmethode messen. Bei Filterung mit I messen wir die Ionisation

$$(33) \quad \begin{cases} i_I = E_{\alpha\alpha'} \cdot F(\lambda)_{\alpha\alpha'} \cdot e^{-\mu_{\alpha\alpha'} d} \cdot e^{-\mu_{\alpha\alpha'} D_{IK}} \\ \quad + E_{\beta\gamma} \cdot F(\lambda)_{\beta\gamma} \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma} d} \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma} D_{IK}} \end{cases}$$

Bei Filterung mit II messen wir die Ionisation

$$(34) \quad \begin{cases} i_{II} = E_{\alpha\alpha'} \cdot F(\lambda)_{\alpha\alpha'} \cdot e^{-\mu_{\alpha\alpha'} d} \cdot e^{-\mu_{\alpha\alpha'} D_{IIL}} \\ \quad + E_{\beta\gamma} \cdot F(\lambda)_{\beta\gamma} \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma} d} \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma} D_{IIL}} \end{cases}$$

Da nun beide Filter so eingerichtet wurden, daß sie rechts der K-Kante von II gleich stark absorbieren und die ersten Summanden beider Gleichungen daher gleich sind, so wird die Differenz

$$(35) \quad i_I - i_{II} = E_{\beta\gamma} \cdot F(\lambda)_{\beta\gamma} \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma} d} \cdot [e^{-\mu_{\beta\gamma} D_{IK}} - e^{-\mu_{\beta\gamma} D_{IIL}}]$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt für die aus dem Strahler austretende Strahlung:

$$(36) \quad \begin{cases} \frac{E_{\alpha\alpha'}}{E_{\beta\gamma}} = \frac{F(\lambda)_{\beta\gamma} \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma} d}}{F(\lambda)_{\alpha\alpha'} \cdot e^{-\mu_{\alpha\alpha'} d}} \\ \quad \cdot \left\{ \frac{i_{II}}{i_I - i_{II}} \cdot \frac{e^{-\mu_{\beta\gamma} D_{IK}} - e^{-\mu_{\beta\gamma} D_{IIL}}}{e^{-\mu_{\alpha\alpha'} D_{IIL}}} - \frac{e^{-\mu_{\beta\gamma} D_{IIL}}}{e^{-\mu_{\alpha\alpha'} D_{IIL}}} \right\} \end{cases}$$

Das hier geschilderte Verfahren zeigt recht augenfällig, daß der Fehler des Rossverfahrens hier nicht einmal dann in Frage kommt, wenn auf der kurzwelligen Seite der K-Kante der Absorptionsunterschied dem gesamten K-Sprunge gleicht. Trotzdem wurde in der vorliegenden Untersuchung statt des sprunghaften Elements I ein solches gewählt, das auf der kurzwelligen Seite der γ -Linie der untersuchten Strahlung ebenfalls einen K-Sprung aufweist (Abb. 5). Es mußten nämlich wegen der im Teil V beschriebenen Versuche derartige Filter ohnehin abgeglichen werden; auch sind die K- und L-Äste von Elementen, deren K-Kanten nicht weit voneinander entfernt liegen, besser parallel, und schließlich werden etwa noch vorhandene Spuren von Streustrahlung, die kurzwelliger ist als die K-Kante von I, unter diesen Bedingungen nahezu völlig unterdrückt. An Stelle von (36) haben wir dann gemäß Abb. 5 zu schreiben:

$$(37) \quad \begin{cases} \frac{E_{\alpha\alpha'}}{E_{\beta\gamma}} = \frac{F(\lambda)_{\beta\gamma} \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma} d}}{F(\lambda)_{\alpha\alpha'} \cdot e^{-\mu_{\alpha\alpha'} d}} \\ \quad \cdot \left\{ \frac{i_{II}}{i_I - i_{II}} \cdot \frac{e^{-\mu_{\beta\gamma} D_{IIL}} - e^{-\mu_{\beta\gamma} D_{IILK}}}{e^{-\mu_{\alpha\alpha'} D_{IIL}}} - \frac{e^{-\mu_{\beta\gamma} D_{IILK}}}{e^{-\mu_{\alpha\alpha'} D_{IIL}}} \right\} \end{cases}$$

Bei Durchführung der Untersuchungen nach dieser Methode wurden Filter aus Ta, Ir, Au und Pb gegeneinander abgeglichen. Das Ta-Filter war das bereits bei der Sprungmethode benutzte, dessen Absorptionsäste genau festgelegt worden waren. Es stand stets senkrecht zum Strahlengang. Die anderen Filter wurden, wie dies

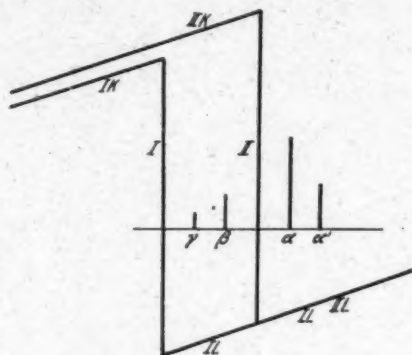


Abb. 5. Zum Zweifilterverfahren: Ausnutzung des K-Sprungs bei beiden Filtern

Ross⁶⁾ vorschlug, so gegen den Strahlengang geneigt, daß bei Untersuchung mit Ta-K-Strahlung die Absorption durch alle Filter genau dieselbe war. Die Filter waren zu diesem Zweck an einem Rahmen

Tabelle 12

Werte der Faktoren in den Gl. (43), (47), (52) und (56)

Strahler	Re 75	Pt 78	Au 79	Hg 80	Bi 83
$F(\lambda)_a \cdot e^{-\mu_a d}$	—	—	—	1,0145	1,0120
$F(\lambda)_{a'} \cdot e^{-\mu_{a'} d}$	—	—	—	—	—
$F(\lambda)_\beta \cdot e^{-\mu_\beta d}$	—	—	1,0560	1,0530	1,0480
$F(\lambda)_a \cdot e^{-\mu_a d}$	—	—	—	—	—
$F(\lambda)_{\beta\gamma} \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma} d}$	—	—	1,0600	1,0580	—
$F(\lambda)_a \cdot e^{-\mu_a d}$	—	—	—	—	—
$F(\lambda)_\gamma \cdot e^{-\mu_\gamma d}$	1,0152	1,0124	1,0132	1,0115	—
$F(\lambda)_\beta \cdot e^{-\mu_\beta d}$	—	—	—	—	—

befestigt, der senkrecht auf einer waagerechten, drehbaren und mit Kreisteilung versehenen Scheibe stand. Nach erfolgtem Abgleich wurde die Scheibe festgeklemmt. Für jedes Filter war eine solche besondere Einrichtung vorhanden, so daß an der Justierung niemals etwas zu ändern war. Jede dieser Vorrichtungen ließ sich leicht aus dem Strahlengang herausnehmen und gegen eine andere vertauschen. Zwei Führungstifte sorgten selbsttätig für genaue Justierung beim Auswechseln. Die Genauigkeit des Abgleichs wurde häufig kontrolliert und erwies sich stets als vollkommen innerhalb der erreichbaren Meßgenauigkeit von $\pm 0,5\%$.

Die Ergebnisse der Untersuchung sind in Tab. 13 zusammengestellt.

Tabelle 13

Die Ergebnisse für $E_{\alpha\alpha'}/E_{\beta\gamma}$ nach dem Zweifilterverfahren

Strahler	Re	Os	Ir	Pt	Au	Au	Hg	Tl	Pb
Filter	Ir, Ta	Ir, Ta	Ir, Ta	Pb, Ta	Au, Ir	Pb, Ir	Pb, Ir	Pb, Ir	Pb, Ir
$\frac{i_{II}}{i_I - i_{II}}$	3,528	3,527	3,814	3,749	4,736	4,675	4,560	4,882	4,981
$\left(\frac{E_{\alpha\alpha'}}{E_{\beta\gamma}}\right)_a$	3,204	3,003	3,080	2,836	3,384	3,298	3,010	3,045	2,922
F_i	1,173	1,177	1,152	1,147	1,158	1,165	1,161	1,157	
$\frac{E_{\alpha\alpha'}}{E_{\beta\gamma}}$	3,758	3,538	3,548	3,254	3,877	3,822	3,510	2,536	3,382

Die Besprechung der Ergebnisse soll später gemeinsam mit den nach den anderen Verfahren gewonnenen Ergebnissen erfolgen, in dessen sei schon hier auf einen wichtigen Umstand hingewiesen. Das Ergebnis für die austretende Strahlung $\left(\frac{E_{\alpha\alpha'}}{E_{\beta\gamma}}\right)_a$ ist ein um so

kleinerer Bruchteil des Beobachtungswertes $\frac{i_{II}}{i_I - i_{II}}$, je höher die Atomnummer des Strahlers ist. Bei Ir beträgt das Verhältnis beider Zahlenwerte 1,1, bei Pb aber 1,7. Der Faktor vor der geschweiften Klammer in (37) verursacht dies nicht; er fällt nur von 1,072 bei Re bis auf 1,0584 bei Pb. Es kommt vielmehr dem Faktor und dem Subtrahenden in der geschweiften Klammer ein wesentlicher, durch Absorption bedingter Einfluß zu, so daß sich Unsicherheiten in der Kenntnis der Absorption in zunehmendem Maße mit steigender Atomnummer auf das Ergebnis auswirken.

V. Das Dreifilterverfahren

Drei gegeneinander abgegliche Filter zur Intensitätsmessung der verschobenen und unverschobenen Linie beim Comptoneffekt hat bereits Wollan¹³⁾ benutzt. Das Verfahren soll auch hier angewandt werden, freilich nicht, ohne den Unterschied in der Sprunghöhe der Absorptionsfilter durch eine Korrektur zu berücksichtigen. Da es sich um monochromatische Strahlung handelt, wird diese Korrektur recht klein bleiben.

1. Das Intensitätsverhältnis $E_{\alpha\alpha'}/E_{\beta\gamma}$

Die drei Filter werden so schräg justiert, daß sie auf ihren L-Ästen die gleiche Absorption besitzen. Sie sollen so ausgewählt werden, daß die β - und γ -Linien eines Strahlers zwischen die

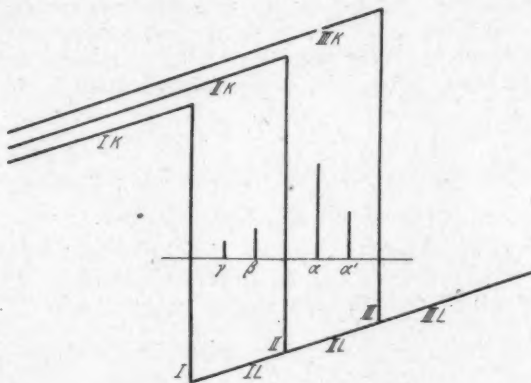


Abb. 6. Zum Dreifilterverfahren

K-Kanten von I und II, das $\alpha\alpha'$ -Dublett zwischen die K-Kanten von II und III fallen (Abb. 6). Dann gilt für die Differenzen der beobachteten Ionisationen:

$$(38) \quad i_I - i_{II} = E_{\beta\gamma} \cdot F(\lambda)_{\beta\gamma} \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma} d} \cdot [e^{-\mu_{\beta\gamma} D_{IL}} - e^{-\mu_{\beta\gamma} D_{IIK}}]$$

und

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} i_{II} - i_{III} &= E_{\alpha\alpha'} \cdot F(\lambda)_{\alpha\alpha'} \cdot e^{-\mu_{\alpha\alpha'} d} \cdot [e^{-\mu_{\alpha\alpha'} D_{IIL}} - e^{-\mu_{\alpha\alpha'} D_{IIIK}}] \\ &+ E_{\beta\gamma} \cdot F(\lambda)_{\beta\gamma} \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma} d} \cdot [e^{-\mu_{\beta\gamma} D_{IIK}} - e^{-\mu_{\beta\gamma} D_{IIIK}}]. \end{aligned} \right.$$

Aus (38) und (39) folgt

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{E_{\alpha\alpha'}}{E_{\beta\gamma}} &= \frac{F(\lambda)_{\beta\gamma} \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma} d}}{F(\lambda)_{\alpha\alpha'} \cdot e^{-\mu_{\alpha\alpha'} d}} \cdot \left(\frac{i_{II} - i_{III}}{i_I - i_{II}} \cdot \frac{e^{-\mu_{\beta\gamma} D_{IIL}} - e^{-\mu_{\beta\gamma} D_{IIK}}}{e^{-\mu_{\alpha\alpha'} D_{IIL}} - e^{-\mu_{\alpha\alpha'} D_{IIK}}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{-\mu_{\beta\gamma} D_{IIK}} - e^{-\mu_{\beta\gamma} D_{IIIK}}}{e^{-\mu_{\alpha\alpha'} D_{IIL}} - e^{-\mu_{\alpha\alpha'} D_{IIIK}}} \right). \end{aligned} \right.$$

Als abgegliche Filter I, II und III dienten Pb, Ir und Ta. Für das Ta-Filter wurde der K - und L -Ast, wie unter Teil II beschrieben, genau festgelegt; für die Auswertung erwies es sich als bedeutungslos, welcher Wert von v benutzt wurde, nur mußte für den K - und L -Ast dasselbe v gewählt werden.

Da alle Filter auf ihren L -Ästen gleich stark absorbieren, so muß sich ihre Absorption auf den K -Ästen unterscheiden, wie oben ausgeführt wurde. Ist nun μ_k der Schwächungskoeffizient an der K -Kante auf deren kurzwelliger Seite, μ_l der Schwächungskoeffizient an der K -Kante auf deren langwelliger Seite, so gilt für ein Filterelement X , dessen L -Ast genau so stark absorbiert wie der Ta- L -Ast:

$$(41) \quad S = \frac{\left(\frac{\mu_k}{\mu_l} \right)_X}{\left(\frac{\mu_k}{\mu_l} \right)_{Ta}} = \frac{\left(\frac{\mu_k d}{\mu_l d} \right)_X}{\left(\frac{\mu_k d}{\mu_l d} \right)_{Ta}} \quad \left| \quad (\mu_l d)_X = (\mu_l d)_{Ta} \quad \right. = \frac{(\mu_k d)_X}{(\mu_k d)_{Ta}},$$

d. h. bei gleicher Absorption auf den L -Ästen verhält sich die Absorption auf den K -Ästen wie die Größe der K -Sprünge. Für diese fand aber Rindfleisch¹¹⁾ zwischen $Z = 13$ und $Z = 74$

$$(42) \quad \frac{\mu_k}{\mu_l} = 7,2053 \cdot Z^{0,2843},$$

und Laubert⁹⁾ bestätigte dies für sämtliche Untersuchungen des Instituts. Hiermit erhalten wir, bezogen auf Ta, jene Faktoren S , mit denen man das μd des Ta- K -Astes zu multiplizieren hat, um das μ für den K -Ast eines Elementes X zu erhalten (Tab. 14). Man erkennt, daß für zwei benachbarte Elemente wie W und Ta der Unterschied des μd dann zwar kleiner ist als 1% , für zwei Elemente

Tabelle 14
Die Absorption der K -Äste relativ zum Ta- K -Ast

Element	Pb	Au	Pt	Ir	W	Ta
Sprung μ_k/μ_l	4,14	4,24	4,27	4,31	4,42	4,46
S	0,928	0,951	0,957	0,965	0,991	1,000

aber, deren Atomnummern sich stärker unterscheiden, wie z. B. Pb (82) und Ta (73), schon mehr als 7% ausmacht. Durch Sonderversuche wurde dieser Tatbestand innerhalb der Meßfehlergrenzen bestätigt. Die nach dem Dreifilterverfahren erhaltenen Ergebnisse sind in Tab. 15 zusammengestellt. Es unterscheidet sich hier das Ergebnis für

Tabelle 15

Die Ergebnisse für $E_{\alpha\alpha'}/E_{\beta\gamma}$, nach dem Dreifilterverfahren

Strahler	Hg	Tl	Pb
Filter	Pb, Ir, Ta	Pb, Ir, Ta	Pb, Ir, Ta
$\frac{i_{II} - i_{III}}{i_I - i_{II}}$	2,795	2,868	2,851
$\left(\frac{E_{\alpha\alpha'}}{E_{\beta\gamma}}\right)_a$	2,756	2,816	2,705
F_I	1,165	1,161	1,157
$\frac{E_{\alpha\alpha'}}{E_{\beta\gamma}}$	3,210	3,269	3,132

die austretende Strahlung $\left(\frac{E_{\alpha\alpha'}}{E_{\beta\gamma}}\right)_a$ vom Beobachtungswert $\frac{i_{II} - i_{III}}{i_I - i_{II}}$ bei Hg, Tl und Pb nur noch um 1,5, 3,5 und 5,1%. Dieser kleine Unterschied wird ganz überwiegend durch den in Gl. (40) als Faktor zum Beobachtungswerte hinzutretenden Absorptionsfaktor bedingt; der zweite Summand in der Klammer, der der verschiedenen Absorption der K-Äste von Ir und Ta Rechnung trägt, macht nur etwa 1% des ersten Summanden aus. Der Absorptionseinfluß ist also bei dem Dreifilterverfahren verhältnismäßig klein, so daß diesem Verfahren offenbar die größte Zuverlässigkeit zukommt. Die mit ihm erhaltenen Ergebnisse liegen um 8–9% niedriger als die nach dem Zweifilterverfahren erhaltenen (Tab. 13).

2. Das Intensitätsverhältnis $E_{\alpha}/E_{\beta\gamma}$

Dieses erhält man für Strahler, bei denen die K-Kante des Filters III zwischen die α - und α' -Linie fällt, während die β - und γ -Linien zwischen den K-Kanten der Filter I und II liegen. Da alle Filter auf ihren L-Ästen gleich stark absorbieren, wird die α' -Linie bei Kombination je zweier Filter stets völlig unterdrückt, so daß wir den Ansatz direkt erhalten, wenn wir das $\alpha\alpha'$ in Gl. (40) durch α ersetzen:

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{E_\alpha}{E_{\beta\gamma}} &= \frac{F(\lambda)_{\beta\gamma} \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma} d}}{F(\lambda)_\alpha \cdot e^{-\mu_\alpha d}} \cdot \left\{ \frac{i_{II} - i_{III}}{i_I - i_{II}} \cdot \frac{e^{-\mu_{\beta\gamma} D_{IL}} - e^{-\mu_{\beta\gamma} D_{IIK}}}{e^{-\mu_\alpha D_{II L}} - e^{-\mu_\alpha D_{III K}}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{-\mu_{\beta\gamma} D_{II K}} - e^{-\mu_{\beta\gamma} D_{III K}}}{e^{-\mu_\alpha D_{II L}} - e^{-\mu_\alpha D_{III K}}} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Unter Verwendung der Filter Pb, Ir und Ta ergab sich für den Strahler Au:

$$\frac{E_\alpha}{E_{\beta\gamma}} \Big|_{\text{Au}} = 2,218$$

und mit den Filtern Pb, Ir und W für den Strahler Hg:

$$\frac{E_\alpha}{E_{\beta\gamma}} \Big|_{\text{Hg}} = 2,029.$$

Für den Einfluß der Absorption im Strahler selbst auf den Beobachtungswert gilt fast genau dasselbe wie bei Bestimmung von $E_{\alpha'}/E_{\beta\gamma}$. Die Werte des Bruches vor der Klammer in Gl. (43) gibt Tab. 12.

3. Das Intensitätsverhältnis $E_{\alpha'}/E_\alpha$

Man erhält dieses für Strahler, bei denen die K -Kante des Filters II zwischen die α - und α' -Linien, die K -Kante von I zwischen die α - und β -Linien des Strahlers fällt, während die K -Kante des Filters III auf der langwelligen Seite der α' -Linie liegen muß.

Setzen wir zur Abkürzung

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} T_1 &= [e^{-\mu_{\alpha'} D_{III}} - e^{-\mu_{\alpha'} D_{III K}}] \\ T_2 &= [e^{-\mu_\alpha D_{IL}} - e^{-\mu_\alpha D_{II K}}] \\ A_1 &= [e^{-\mu_\alpha D_{II K}} - e^{-\mu_\alpha D_{III K}}], \\ A_2 &= [e^{-\mu_{\beta\gamma} D_{II K}} - e^{-\mu_{\beta\gamma} D_{III K}}] \\ A_3 &= [e^{-\mu_{\beta\gamma} D_{IK}} - e^{-\mu_{\beta\gamma} D_{II K}}] \end{aligned} \right.$$

so gilt für die Ionisationsdifferenzen

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} i_{II} - i_{III} &= E_{\alpha'} \cdot F(\lambda)_{\alpha'} \cdot e^{-\mu_{\alpha'} d} \cdot T_1 + E_\alpha \cdot F(\lambda)_\alpha \cdot e^{-\mu_\alpha d} \cdot A_1 \\ &\quad + E_{\beta\gamma} \cdot F(\lambda)_{\beta\gamma} \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma} d} \cdot A_2 \end{aligned} \right.$$

und

$$(46) \quad i_I - i_{II} = E_\alpha \cdot F(\lambda)_\alpha \cdot e^{-\mu_\alpha d} \cdot T_2 + E_{\beta\gamma} \cdot F(\lambda)_{\beta\gamma} \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma} d} \cdot A_3;$$

aus beiden Gleichungen folgt dann

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{E_{\alpha'}}{E_\alpha} &= \frac{F(\lambda)_\alpha \cdot e^{-\mu_\alpha d}}{F(\lambda)_{\alpha'} \cdot e^{-\mu_{\alpha'} d}} \cdot \left\{ \frac{i_{II} - i_{III}}{i_I - i_{II}} \cdot \frac{T_2}{T_1} + \frac{E_{\beta\gamma} \cdot F(\lambda)_{\beta\gamma} \cdot e^{-\mu_{\beta\gamma} d}}{E_\alpha \cdot F(\lambda)_\alpha \cdot e^{-\mu_\alpha d}} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[\frac{i_{II} - i_{III}}{i_I - i_{II}} \cdot \frac{A_3}{T_1} - \frac{A_2}{T_1} \right] - \frac{A_1}{T_1} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Die Größen A , die dem Absorptionsunterschiede nahe beieinander liegender K-Äste Rechnung tragen, sind stets kleiner als 0,01. Man erhält daher zunächst einen Näherungswert für das Ergebnis $E_{\alpha'}/E_{\alpha}$, wenn man nur mit dem ersten Summanden in der geschweiften Klammer rechnet. Dieser ist dann genau genug bekannt, um daraus zu berechnen:

$$(48) \quad \frac{E_{\beta\gamma}}{E_{\alpha}} = \frac{E_{\beta\gamma}}{E_{\alpha\alpha'}} \cdot \frac{E_{\alpha\alpha'}}{E_{\alpha}} = \frac{\frac{E_{\alpha'}}{E_{\alpha}} + 1}{\frac{E_{\alpha\alpha'}}{E_{\beta\gamma}}},$$

wobei man den Nenner aus den oben beschriebenen Ergebnissen kennt. Damit sind alle Größen in der geschweiften Klammer hinlänglich bekannt, um den endgültigen Wert von $E_{\alpha'}/E_{\alpha}$ aus (47) zu erhalten.

Auf diesem Wege ergab sich bei Benutzung der Filter Ir, W und Ta für den Strahler Hg:

$$\left. \frac{E_{\alpha'}}{E_{\alpha}} \right|_{\text{Hg}} = 0,551$$

und mit dem Filter Pt, Ir, und W für den Strahler Bi:

$$\left. \frac{E_{\alpha'}}{E_{\alpha}} \right|_{\text{Bi}} = 0,621.$$

4. Das Intensitätsverhältnis E_{α}/E_{β}

Hier muß die K-Kante des Filters I zwischen den β - und γ -Linien, die Kante des Filters II zwischen den β - und α -Linien und die Kante des Filters III zwischen den α - und α' -Linien des Strahlers liegen.

Setzen wir hier

$$(49) \quad \begin{cases} T_1 = [e^{-\mu_{\alpha}} D_{\text{III}L} - e^{-\mu_{\alpha}} D_{\text{III}K}] \\ T_2 = [e^{-\mu_{\beta}} D_{\text{I}L} - e^{-\mu_{\beta}} D_{\text{II}K}] \\ A_1 = [e^{-\mu_{\beta}} D_{\text{II}K} - e^{-\mu_{\beta}} D_{\text{III}K}], \\ A_2 = [e^{-\mu_{\gamma}} D_{\text{II}K} - e^{-\mu_{\gamma}} D_{\text{III}K}] \\ A_3 = [e^{-\mu_{\gamma}} D_{\text{I}K} - e^{-\mu_{\gamma}} D_{\text{II}K}] \end{cases}$$

so gilt für die Ionisationsdifferenzen

$$(50) \quad \begin{cases} i_{\text{II}} - i_{\text{III}} = E_{\alpha} \cdot F(\lambda)_{\alpha} \cdot e^{-\mu_{\alpha}d} \cdot T_1 + E_{\beta} \cdot F(\lambda)_{\beta} \cdot e^{-\mu_{\beta}d} \cdot A_1 \\ \quad + E_{\gamma} \cdot F(\lambda)_{\gamma} \cdot e^{-\mu_{\gamma}d} \cdot A_2, \end{cases}$$

$$(51) \quad i_{\text{I}} - i_{\text{II}} = E_{\beta} \cdot F(\lambda)_{\beta} \cdot e^{-\mu_{\beta}d} \cdot T_2 + E_{\gamma} \cdot F(\lambda)_{\gamma} \cdot e^{-\mu_{\gamma}d} \cdot A_3,$$

und wir erhalten

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{E_a}{E_\beta} &= \frac{F(\lambda)_\beta \cdot e^{-\mu_\beta d}}{F(\lambda)_a \cdot e^{-\mu_a d}} \cdot \left\{ \frac{i_{II} - i_{III}}{i_I - i_{II}} \cdot \frac{T_2}{T_1} + \frac{E_\gamma \cdot F(\lambda)_\gamma \cdot e^{-\mu_\gamma d}}{E_\beta \cdot F(\lambda)_\beta \cdot e^{-\mu_\beta d}} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[\frac{i_{II} - i_{III}}{i_I - i_{II}} \cdot \frac{d_3}{T_1} - \frac{d_2}{T_1} \right] - \frac{d_1}{T_1} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Wir bestimmen hier zunächst ohne den zweiten und dritten Summanden in der geschweiften Klammer einen Näherungswert für E_a/E_β . Aus diesem und aus dem bereits oben bestimmten Werte für $E_a/E_{\beta\gamma}$ folgt

$$(53) \quad \frac{E_\gamma}{E_\beta} = \frac{\frac{E_a}{E_\beta}}{\frac{E_a}{E_{\beta\gamma}}} - 1$$

mit ausreichender Genauigkeit. Damit läßt sich der gesamte Inhalt der geschweiften Klammer genau genug berechnen. Auf diesem Wege wurde mit den Filtern Pt, W und Ta für den Strahler Au erhalten:

$$\frac{E_a}{E_\beta} \Big|_{Au} = 2,660;$$

mit den Filtern Au, Ir und W für den Strahler Hg:

$$\frac{E_a}{E_\beta} \Big|_{Hg} = 2,790$$

und mit den Filtern Pb, Au und Ir für den Strahler Bi:

$$\frac{E_a}{E_\beta} \Big|_{Bi} = 2,485.$$

5. Das Intensitätsverhältnis E_β/E_γ

Zu seiner Bestimmung muß die K-Kante des Filters I auf der kurzwelligen Seite der γ -Linie, die K-Kante des Filters II zwischen den γ - und β -Linien und die Kante des Filters III zwischen den β - und α -Linien des Strahlers liegen. Dann sind die Ionisationsdifferenzen

$$(54) \quad i_I - i_{II} = E_\gamma \cdot F(\lambda)_\gamma \cdot e^{-\mu_\gamma d} \cdot [e^{-\mu_\gamma D_{IL}} - e^{-\mu_\gamma D_{IK}}]$$

und

$$(55) \quad \left\{ \begin{aligned} i_{II} - i_{III} &= E_\beta \cdot F(\lambda)_\beta \cdot e^{-\mu_\beta d} \cdot [e^{-\mu_\beta D_{IL}} - e^{-\mu_\beta D_{IK}}] \\ &\quad + E_\gamma \cdot F(\lambda)_\gamma \cdot e^{-\mu_\gamma d} \cdot [e^{-\mu_\gamma D_{IK}} - e^{-\mu_\gamma D_{IIIK}}]. \end{aligned} \right.$$

Damit wird

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{E_{\beta}}{E_{\gamma}} &= \frac{F(\lambda)_{\gamma} \cdot e^{-\mu_{\gamma} d}}{F(\lambda)_{\beta} \cdot e^{-\mu_{\beta} d}} \\ &\cdot \left\{ \frac{i_{II} - i_{III}}{i_I - i_{II}} \cdot \frac{e^{-\mu_{\gamma} D_{IL}} - e^{-\mu_{\gamma} D_{IIK}}}{e^{-\mu_{\beta} D_{IIL}} - e^{-\mu_{\beta} D_{IK}}} - \frac{e^{-\mu_{\gamma} D_{IIK}} - e^{-\mu_{\gamma} D_{IIIK}}}{e^{-\mu_{\beta} D_{IIL}} - e^{-\mu_{\beta} D_{IIIK}}} \right\} \end{aligned} \right.$$

Hieraus ergeben sich die Werte der Tab. 16.

Tabelle 16

Die Ergebnisse für E_{β}/E_{γ} nach dem Dreifilterverfahren

Strahler	Re	Pt	Au	Hg
Filter	Ir, W, Ta	Pb, Ir, Ta	Au, Pt, Ir	Pb, Au, Ir
E_{β}/E_{γ}	2,700	3,230	3,973	2,700

VI. Die Zusammenstellung der Ergebnisse

Wir stellen zunächst die nach den drei verschiedenen Verfahren gewonnenen Ergebnisse für $E_{\alpha\alpha'}/E_{\beta\gamma}$ in Tab. 17 zusammen; sie sind auch in Abb. 7 aufgenommen. Man sieht, daß sich die Intensitätsverhältnisse für die 8 Schwerelemente keiner glatten Kurve einfügen;

Tabelle 17

Zusammenstellung und Mittelwertbildung der nach verschiedenen Verfahren erhaltenen Ergebnisse für $E_{\alpha\alpha'}/E_{\beta\gamma}$

Strahler	Re 75	Os 76	Ir 77	Pt 78	Au 79	Hg 80	Tl 81	Pb 82
Sprungverfahren Ta	3,814	3,593	3,400	3,180	—	—	—	—
Sprungverfahren W	—	3,521	3,352	3,214	3,017	—	—	—
Zweifilterverfahren	3,758	3,538	3,548	3,254	3,822 3,877	3,510	3,536	3,382
Dreifilterverfahren	—	—	—	—	—	3,210	3,269	3,132
$E_{\alpha\alpha'}/E_{\beta\gamma}$	3,786	3,551	3,433	3,216	3,572	3,360	3,402	3,257

eher hat es den Anschein, als lägen die Werte für die Elemente Re bis Pt auf einer geneigten Geraden, die Werte für die Elemente Au bis Pb auf einer zweiten Geraden, die gegen die erste verschoben ist und eine ähnliche Neigung besitzt. Diesem Befund dürfte indessen keine reelle Bedeutung zukommen. Wir müssen wohl eher annehmen, daß eine Streuung der Ergebnisse vorliegt. Unzureichende Meßgenauigkeit kann nicht der Grund sein, denn sonst hätten sich an verschiedenen Tagen durchgeführte Beobachtungen nicht so gut

reproduziert. Eher wäre damit zu rechnen, daß die Streuung durch unzureichenden Reinheitsgrad des Materials der Strahler verursacht sei. Am wahrscheinlichsten dürfte die Streuung indessen der Feinstruktur der Absorption auf der kurzwelligen Seite der K -Kante zuzuschreiben sein, wie sie Coster und Veldkamp²³⁾ untersucht haben. Sie beobachteten Absorptionsschwankungen bis zu 7,8%, und schon Grothey¹⁾ schrieb diesem Einfluß die Streuung seiner Ergebnisse für $E_{\alpha\alpha'}/E_{\beta\gamma}$ zu. Seine Ergebnisse sind nun ebenfalls

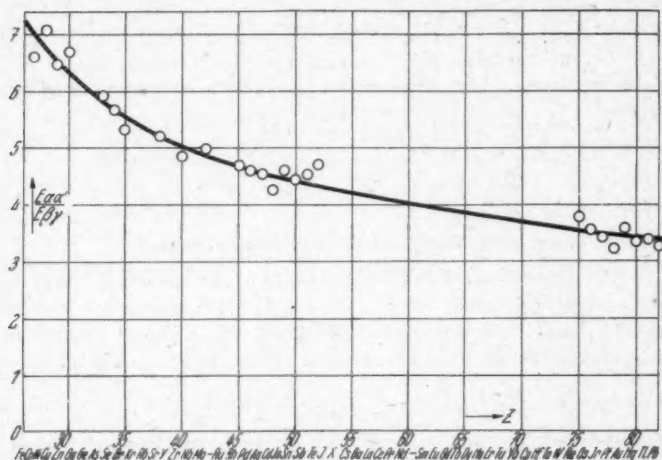


Abb. 7. Zusammenstellung der Ergebnisse von Grothey und der des Verf.

in Abb. 7 dargestellt. Man erkennt, daß diese um einen ähnlichen Prozentsatz streuen, wie die des Verf. Dennoch bleibt diese Streuung klein im Vergleich zu derjenigen anderer Autoren.

Es wurde nun der Versuch unternommen, die Werte Grotheys und des Verf. für $E_{\alpha\alpha'}/E_{\beta\gamma}$ durch eine Funktion der Atomnummer Z darzustellen.

Die Form

$$(57) \quad \frac{E_{\alpha\alpha'}}{E_{\beta\gamma}} = K \cdot Z^m$$

lieferte nach der Methode der kleinsten Quadrate die Werte $K = 51,576$ und $m = -0,6232$; besser gibt die ausgezogene Kurve die Ergebnisse wieder. Sie läßt sich gut durch die Beziehung

$$(58) \quad \frac{E_{\alpha\alpha'}}{E_{\beta\gamma}} = 1,859 \cdot e^{+12,785 \cdot Z - 0,691}$$

darstellen; die Abweichungen von der ausgezogenen Kurve lassen sich zeichnerisch nicht mehr zum Ausdruck bringen. Die Funktion (58) wurde dadurch gewonnen, daß für $Z = 34, 47$ und 78 die Werte $E_{\alpha\alpha'}/E_{\beta\gamma}$ der gezeichneten Kurve als genau angesehen wurden; durch die somit gegebenen drei Wertepaare wurden aus (57) die drei Konstanten von (58) berechnet.

Wir stellen nun in Tab. 18 die übrigen gemessenen Intensitätsverhältnisse zusammen. Dabei zeigen sich nun Schwankungen des Intensitätsverhältnisses derselben Linien beim Übergang von einem Element zum anderen, denen zweifellos keine Realität zukommt und

Tabelle 18

Zusammenstellung und Mittelwertbildung der beobachteten Intensitätsverhältnisse außer $E_{\alpha\alpha'}/E_{\beta\gamma}$

Strahler	W 74	Re 75	Pt 78	Au 79	Hg 80	Bi 83	Mittel
$E_{\alpha}/E_{\beta\gamma}$ Dreifilterverfahren	—	—	—	2,218	2,039	—	2,122
$E_{\alpha'}/E_{\alpha}$ Dreifilterverfahren	—	—	—	—	0,551	0,622	0,593
E_{α}/E_{β} Sprungverfahren	—	—	—	0,600	0,603	—	—
E_{α}/E_{β} Dreifilterverfahren	—	—	—	2,660	2,790	2,485	2,642
E_{β}/E_{γ} Dreifilterverfahren	—	2,700	3,230	3,973	2,700	—	3,043
E_{β}/E_{γ} Sprungverfahren	3,335	2,537	—	—	—	—	—

die wahrscheinlich auch in den Absorptionsschwankungen nach Coster und Veldkamp¹⁹⁾ ihre Ursache haben. Es dürfte daher gerechtfertigt sein, aus allen Messungen des Intensitätsverhältnisses derselben Linien das Mittel zu bilden, zumal nach der Kurve der Abb. 7 zu erwarten ist, daß jedes der Intensitätsverhältnisse im Bereiche der Schwerelemente nur wenig von der Atomnummer abhängig sein wird.

Ehe wir die Mittelwerte berechnen, möge auf folgendes hingewiesen werden. Ebenso gut, wie man aus den Beobachtungswerten das Intensitätsverhältnis E_1/E_2 berechnete, hätte man auch das Intensitätsverhältnis E_2/E_1 berechnen können. Bei der Streuung des Ergebnisses für dieselben Linien verschiedener Elemente ist es aber nicht gleichgültig, ob man den reziproken Mittelwert oder ob man den Mittelwert der reziproken Werte bildet. Beide Ergebnisse sind aber gleichberechtigt. Es wurde daher folgendes Verfahren eingeschlagen; es wurde von allen Einzelwerten E_1/E_2 sowohl der Mittelwert $\left(\frac{E_1}{E_2}\right)_m$ als auch der reziproke Mittelwert $1:\left(\frac{E_1}{E_2}\right)_m$ gebildet.

*Außerdem aber wurde von jedem Einzelwerte E_1/E_2 der reziproke Wert E_2/E_1 gebildet und aus allen der Mittelwert der reziproken Werte $\left(\frac{E_2}{E_1}\right)_m$ und hiervon wiederum der reziproke Wert $1:\left(\frac{E_2}{E_1}\right)_m$.

bestimmt. Schließlich wurden als endgültiges Ergebnis die beiden Mittelwerte

$$(59) \quad \frac{1}{2} \left[\left(\frac{E_1}{E_2} \right)_m + \frac{1}{\left(\frac{E_2}{E_1} \right)_m} \right] \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \left[\left(\frac{E_2}{E_1} \right)_m + \frac{1}{\left(\frac{E_1}{E_2} \right)_m} \right]$$

berechnet, deren Produkt nunmehr fast völlig genau den Wert 1 ergab, wie es sein soll. Die in der letzten Spalte von Tab. 18 angegebenen Mittelwerte wurden auf diesem Wege gewonnen.

Es lassen sich nun einige der vorliegenden Ergebnisse dadurch kontrollieren, daß man sie aus den Ergebnissen an anderen Linienkombinationen berechnet. Dies soll in zwei Fällen durchgeführt werden.

1. $E_{\alpha'}/E_a$ wurde an Au, Hg und Bi im Mittel zu 0,593 bestimmt. Wir können $E_{\alpha'}/E_a$ aber auch aus $E_{\alpha\alpha'}/E_{\beta\gamma}$ und $E_a/E_{\beta\gamma}$ berechnen; denn es ist

$$(60) \quad \frac{E_{\alpha'}}{E_a} = \frac{\frac{E_{\alpha\alpha'}}{E_{\beta\gamma}}}{\frac{E_a}{E_{\beta\gamma}}} - 1.$$

Da $E_{\alpha\alpha'}/E_{\beta\gamma}$ mit steigender Atomnummer kleiner wird, dürfen wir höchstens die Messungen an Pt bis Pb zur Mittelwertbildung für Au, Hg und Bi in der geschilderten Weise heranziehen. Das ergibt $\left(\frac{E_{\alpha\alpha'}}{E_{\beta\gamma}} \right)_m = 3,357$. Ferner fanden wir für $\frac{E_a}{E_{\beta\gamma}}$ als Mittelwert 2,122.

Damit folgt:

$$\frac{E_{\alpha'}}{E_a} = \frac{3,357}{2,122} - 1 = \frac{1,235}{2,122} = 0,582,$$

was mit dem Mittelwerte der direkten Beobachtungen 0,593 recht befriedigend übereinstimmt.

2. E_{β}/E_{γ} wurde aus 6 Beobachtungen an 5 Elementen zu 3,043 bestimmt; um E_{γ}/E_a zu erhalten, ziehen wir erstens das Ergebnis

$$\frac{E_a}{E_{\beta\gamma}} = 2,122 \text{ heran. Da}$$

$$\frac{E_{\beta\gamma}}{E_{\gamma}} = \frac{E_{\beta}}{E_{\gamma}} + 1 = 4,043$$

ist, so erhalten wir

$$\frac{E_a}{E_{\gamma}} = \frac{E_a}{E_{\beta\gamma}} \cdot \frac{E_{\beta\gamma}}{E_{\gamma}} = 2,122 \cdot 4,043 = 8,58$$

oder

$$\frac{E_{\gamma}}{E_a} = 0,1165.$$

Zweitens verwenden wir das Ergebnis $\frac{E_a}{E_\beta} = 2,642$ und erhalten

$$\frac{E_a}{E_\gamma} = \frac{E_\beta}{E_\gamma} \cdot \frac{E_a}{E_\beta} = 3,043 \cdot 2,642 = 8,04$$

oder

$$\frac{E_\gamma}{E_a} = 0,1245.$$

Beide Ergebnisse stimmen recht befriedigend überein, so daß wir mit dem Mittelwert $\frac{E_\gamma}{E_a} = 0,1205$ rechnen dürfen.

Wir wollen schließlich in Tab. 19 unsere Mittelwerte der verschiedenen Intensitätsverhältnisse denen gegenüberstellen, die Duane und Stenström⁹⁾ an W erhielten, wobei wir die Intensität der α -Linie gleich 100 setzen. Die Übereinstimmung darf wohl als recht befriedigend angesehen werden.

Tabelle 19

Vergleich der Ergebnisse des Verf. mit denen von Duane und Stenström

Beobachter	$\gamma (\beta_2)$	$\beta (\beta_1)$	$\alpha (\alpha_1)$	$\alpha' (\alpha_2)$	(α_3)	Summe
Duane u. Stenström	15	35	100	50	4	204
Voth	12	38	100	59		209

Zusammenfassung

1. Es wurde das Intensitätsverhältnis der K-Serienlinien bei den Schwerelementen nach 3 Absorptionsverfahren untersucht, nach dem Sprungverfahren von Küstner, nach dem Zweifilterverfahren von Ross und nach dem Dreifilterverfahren von Wollan. Dabei wird der meist übersehene Tatbestand durch Korrekturen berücksichtigt, daß zwei Elemente, die auf ihren L-Ästen gleich stark absorbieren, auf ihren K-Ästen verschiedene Absorption zeigen müssen, weil die Größe des K-Sprunges mit steigender Atomnummer abnimmt.

2. Die an den Schwerelementen erhaltenen Ergebnisse für $E_{\alpha\alpha'}/E_{\beta\gamma}$ lassen sich mit den von Grothey zwischen Co(27) und Te(52) erhaltenen in Einklang bringen. Alle Ergebnisse lassen sich in Abhängigkeit von der Atomnummer Z durch die Gleichung

$$(58) \quad \frac{E_{\alpha\alpha'}}{E_{\beta\gamma}} = 1,859 \cdot e^{+12,786 \cdot Z - 0,691}$$

darstellen.

3. Die Intensitätsverhältnisse der einzelnen K -Serienlinien zur K_{α} -Linie werden als Mittelwerte aus den Beobachtungen an verschiedenen Elementen gewonnen. Das Ergebnis stimmt recht befriedigend mit den Intensitätsverhältnissen überein, die Duane und Stenström⁹⁾ für die K -Serie des W fanden.

Herrn Prof. Dr. Küstner danke ich herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit und deren unermüdliche Förderung, Herrn W. Block für die tabellarische Auswertung einiger Formeln, sowie der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Überlassung der Stabilisierungsanlage, der Ventilröhren, der Röntgenröhre und der Dämpfungswaage.

Literatur

- 1) W. Grothey, Ann. d. Phys. [5] 25. S. 577. 1936.
- 2) H. Küstner, Ztschr. f. Phys. 70. S. 468. 1931.
- 3) H. Küstner u. E. Arends, Ann. d. Phys. [5] 22. S. 443. 1935.
- 4) H. Th. Meyer, Wiss. Veröff. a. d. Siemenskonzern 7. S. 108. 1929.
- 5) S. Laubert, Ann. d. Phys. [5] 40. S. 553. 1941.
- 6) P. A. Ross, Journ. opt. Soc. Amer. 16. S. 443. 1928; Phys. Rev. 28. S. 425. 1926.
- 7) H. Küstner, Ztschr. f. Phys. 70. S. 324. 1931.
- 8) H. Küstner, Ztschr. f. Phys. 77. S. 52. 1932.
- 9) W. Duane u. W. Stenström, Proc. of Nat. Ac. of Sc. 6. S. 477. 1920.
- 10) H. Küstner u. H. Trübestein, Ann. d. Phys. [5] 28. S. 385. 1937.
- 11) H. Rindfleisch, Ann. d. Phys. [5] 28. S. 409. 1937.
- 12) E. O. Wollan, Phys. Rev. [2] 43. S. 985. 1933; Helvetica Physica Acta 6. S. 270. 1933; Phys. Ztschr. 35. S. 353. 1934.
- 13) D. Coster u. J. Veldkamp, Ztschr. f. Phys. 70. S. 306. 1931; 74 S. 191. 1932.

Göttingen.

(Eingegangen 27. März 1942)